Matemática 3

Centro Educacional Evolução

Credenciado pela Portaria nº. 264/2009 SEDF

Tel: (61) 3046 2090 / 99244-5152

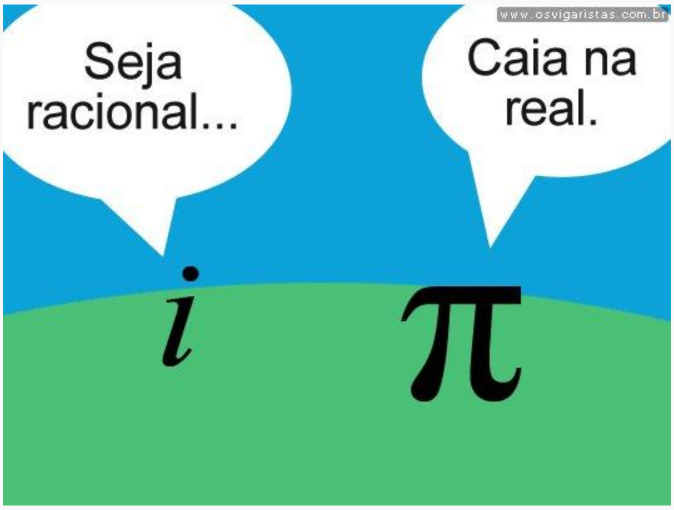
C-1 Lote 1/12 Sobreloja 1 Edifício TTC

Brasília-DF

www.centroevolucao.com.br

TENHO DÚVIDAS
JÁ ESTUDEI

MÓDULO III



ANÁLISE COMBINATÓRIA

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Princípio Fundamental da Contagem

O **princípio fundamental da contagem** é um princípio combinatório que indica de quantas formas se pode escolher um elemento de cada um de *n* conjuntos finitos. Se o primeiro conjunto tem k_1 elementos, o segundo tem k_2 elementos, e assim sucessivamente, então o número total T de escolhas é dado por:

$$T = k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3 \,.\, \ldots \, k_n$$

O princípio fundamental da contagem nos diz que sempre devemos multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer. Por exemplo, para montar um computador, temos 3 diferentes tipos de monitores, 4 tipos de teclados, 2 tipos de impressora e 3 tipos de "CPU". Para saber o numero de diferentes possibilidades de computadores que podem ser montados com essas peças, somente multiplicamos as opções:

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$$

Então, têm-se 72 possibilidades de configurações diferentes. Um problema que ocorre é quando aparece a palavra "ou", como na questão: Quantos pratos diferentes podem ser solicitados por um cliente de restaurante, tendo disponível 3 tipos de arroz, 2 de feijão, 3 de macarrão, 2 tipos de cervejas e 3 tipos de refrigerante, sendo que o cliente não pode pedir cerveja e refrigerante ao mesmo tempo, e que ele obrigatoriamente tenha de escolher uma opção de cada alimento?

A resolução é simples: 3 x 2 x 3 = 18, somente pela comida. Como o cliente não pode pedir cerveja e refrigerantes juntos, não podemos multiplicar as opções de refrigerante pelas opções de cerveja. O que devemos fazer aqui é apenas somar essas possibilidades:

$$(3 \times 2 \times 3) \times (2 + 3) = 90$$

Resposta para o problema: existem 90 possibilidades de pratos que podem ser montados com as comidas e bebidas disponíveis.

Outro exemplo:

No sistema brasileiro de placas de carro, cada placa é formada por três letras e quatro algarismos. Quantas placas onde o número formado pelos algarismos seja par, podem ser formadas?

Primeiro, temos de saber que existem 26 letras. Segundo, para que o numero formado seja par, teremos de limitar o ultimo algarismo a um numero par. Depois, basta multiplicar.

$26 \times 26 \times 26 = 17.567$ parte das letras

10 x 10 x 10 x 5 = 5.000 parte dos algarismos, note que na última casa temos apenas 5 possibilidades, pois queremos um número par (0, 2, 4, 6, 8).

Agora é só multiplicar as partes: 17.567 x 5.000 = 87.835.000

Resposta para a questão: existem 87.835.000 placas onde a parte dos algarismos forme um número par.

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k1 maneiras diferentes, a segunda de k2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

T = k1. k2 . k3 . ... . kn

Exemplo: O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:

Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ.

Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas.

Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000.

Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos. Perceberam?

Princípio da Casa de Pombos

Ideia principal: Se existirem pelo menos K+1 pombos, e somente K casas, pelo menos uma casa vai ter mais do que um pombo.

Fatorial

O fatorial de um número **n** (n pertence ao conjunto dos números naturais) é sempre o produto de todos os seus antecessores, incluindo si próprio e excluindo o zero. A representação é feita pelo número fatorial seguido do sinal de exclamação, **n!**

Exemplo de número fatorial:

$$6! = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 720$$

Importante: $n \geq 0$ (n maior ou igual a zero) , ou seja, não existe fatorial para números negativos.

O fatorial de 0 (**0!**) é 1. O fatorial de n1 (1!) também é 1.

O numero fatorial pode ser modificado para outras formas:

$$n! = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, (n-3)!$$

Exemplo:

6! = 6 . (6-1) . (6-2) . (6-3)!

6! = 6 . 5 . 4 . 3!

6! = 120 . 3!

6! = 120 . 3 . (3-1) . (3-2)!

6! = 120 . 3 . 2 . 1!

6! = 120 . 6 = 720

Seja n um número inteiro não negativo.

Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1 para $n^{3}2$.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

- 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
- 4! = 4.3.2.1 = 24
  observe que 6! = 6.5.4!
- 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
- 10! = 10.9.8.7.6.5!
- 10! = 10.9.8!

Divisão de fatoriais

A divisão de fatoriais acontece bastante em análise combinatória. Observe:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \,.\, (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n \,.\, \cancel{(n-1)}!}{\cancel{(n-1)}!} = n$$

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = \frac{(n+5) \,.\, (n+4)!}{(n+4)!} = \frac{(n+5) \,.\, \cancel{(n+4)}!}{\cancel{(n+4)}!} = n+5$$

Cuidado: As seguintes operações **NÃO** são válidas:

$$n! + x! = (n + x)!$$

$$n! - x! = (n - x)!$$

$$n! \,.\, x! = (n \,.\, x)!$$

ESTUDO DIRIGIDO

a) Quantas rolagens de dado (um dado de 6 faces) são necessárias para se ter certeza que um mesmo número vai cair duas vezes? R = 7 vezes

b) Existem N pessoas em uma sala. Quantas pessoas são necessárias para se ter certeza de que 3 nasceram no mesmo mês? R = 25 pessoas

c) Quantos números naturais de 2 algarismos distintos existem?

d) Quantos destes números são divisíveis por 5?

e) Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

f) Quantos são os gabaritos possíveis para um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

g) Em um grupo existem 7 pessoas, entre elas Roberto e Ana. Quantas são as filas que podem ser formadas, de modo que Roberto seja sempre o primeiro e Ana seja sempre a última de cada fila?

Permutação

A Permutação, meus amigos, é tão somente um caso particular do Arranjo! Caso nos omitíssemos de falar em Permutação, vocês acertariam a questão do mesmo jeito, aplicando o Arranjo!

Mas não é o caso! Melhor é conhecê-la! Quando estivermos em uma questão de Arranjo (já sabemos como identificá-la!) e observarmos que o n (número de elementos do "conjunto universo") é igual ao p (número de elementos dos subgrupos), então estaremos diante de uma questão de Permutação!

Consideremos os exemplos abaixo, os quais são meras variações dos que vimos no Arranjo.

Exemplo: Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de cinco dígitos distintos poderão ser formados?

Solução: A questão é de Arranjo, conforme já havíamos verificado. Arranjo de quanto em quanto?

O grupo maior tem cinco elementos, ou seja: n = 5.

E os subgrupos terão também cinco elementos, ou seja: p=5.

Ora, quando a questão é de Arranjo, e temos que n = p, dizemos então que estamos em um caso de Permutação.

Em outras palavras:

$A_{5,5}$ = P5 (leia-se: "permutação de cinco")

Fórmula da Permutação:

$$P_n = n!$$

Onde **n** é o número de elementos do conjunto universo, que é também o mesmo número de elementos dos subgrupos que serão formados!

Voltando ao nosso exemplo, teremos que:

$$A_{5,5} = P\,5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é Pn = n! onde n! = n(n-1)(n-2)... .1 .

Exemplos:

1. P6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
2. Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.
   P5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120

Denomina-se **ANAGRAMA** o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo: Os possíveis anagramas da palavra REI são: REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

Permutação com Elementos Repetidos:

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim, sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Exemplo: Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:

Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes.

Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2.

Sendo k o número procurado, podemos escrever:

k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200

Resposta: 151200 anagramas.

Arranjo Simples

Dado um conjunto com n elementos , chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem.

Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos.

Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:

1. arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
2. arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por An,k , teremos a seguinte fórmula:

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs : é fácil perceber que An,n = n! = Pn . (Verifique)

Exemplo: Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As sequências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8.

Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:

10.9.8 = 720.

Observe que 720 = A10,3

Combinação Simples

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo: No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:

a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.

b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.

c) combinações de taxa 4: abcd.

Representando por Cm,p o número total de combinações de m elementos tomados p a p (taxa p), temos a seguinte fórmula:

$$C(m,p)=\binom{m}{p}=\frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como Número binomial.

Exemplo: Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:

C15,10 = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) =

= 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

Exercício Resolvido

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:
Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada.
Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.
Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem - PFC:

N = 2.2.2.2.2.2 = 64

Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.

Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

Decidindo entre o Arranjo e a Combinação:

Uma vez superado o primeiro momento, e considerando que já sabemos que a questão será resolvida por Arranjo ou Combinação, seguiremos os passos seguintes, a fim de nos definirmos por uma ou por outra técnica de resolução. Vejamos:

1º **Passo)** Criaremos um resultado possível para o subgrupo;

2º **Passo)** Inverteremos a ordem do resultado que acabamos de criar (no 1º passo);

3º **Passo)** Compararemos os dois resultados que estão diante de nós (1º e 2º passos):

- Se forem resultados diferentes: resolveremos a questão por Arranjo!

- Se forem resultados iguais: resolveremos a questão por Combinação!

Exemplo: Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

E agora, Arranjo ou Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível, podemos ter: (1 2 3). O número cento e vinte e três. Pode ser? Claro!

2º Passo) Invertendo a ordem do resultado criado: (3 2 1). Chegamos ao número trezentos e vinte e um.

3º Passo) A comparação! São iguais ou diferentes os dois resultados acima? Ora, tratando-se de números, é claro que são distintos!

Conclusão: resolveremos a questão por Arranjo!

Exemplo:

Dispondo das seguintes espécies de frutas {maçã, mamão, melão, banana, pêra, uva, laranja e melancia}, quantos tipos de saladas podem ser formados, contendo três tipos de frutas?

Será Arranjo ou será Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível: (mamão, melão e maçã) Gostaram da minha salada? Se não gostaram, vai ela mesma!

2º Passo) Invertamos a ordem! Teremos: (maçã, melão e mamão)

3º Passo) Comparemos: A salada do primeiro passo é igual ou é diferente da salada do segundo passo? O sabor é o mesmo? Claro que sim! Os resultados são iguais!

Conclusão: a questão sai por Combinação!

É somente isso! Se vocês se lembrarem destes três exemplos simples acima, serão capazes de identificar o caminho de resolução de qualquer questão de Análise Combinatória!

Resolvendo questões por Arranjo:

Uma vez sabendo identificar quais as questões que se resolvem por Arranjo, resta saber como se dá tal resolução!

A fórmula do Arranjo é a seguinte:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Onde:

- n é o número de elementos do conjunto universo; e
- p é o número de elementos do subgrupo.

Para quem anda mais esquecido, esse sinal de EXCLAMAÇÃO (!) significa a operação fatorial. Trata-se, tão somente, de um produto que se inicia com o próprio valor (que antecede o sinal "!") e vai se reduzindo até chegar a um.

Exemplo:

8! = 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1

E assim por diante!

Observem que, sempre que formos fazer uma divisão entre fatoriais, repetiremos o menor deles, e desenvolveremos o maior até que se iguale ao menor.

Exemplo:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!}$$

Viram? E agora? Ora, agora resta cortarmos o 5! do numerador com o do denominador. E teremos apenas que:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8x7x6$$

Fácil, não? Mais fácil que roubar doce de criança! Pois bem, voltemos ao exemplo dois da página anterior:

Exemplo: Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Primeira análise: os elementos do subgrupo podem ser iguais ou têm que ser distintos? Distintos, pois assim estabelece o enunciado. Daí, resolveremos por Arranjo ou Combinação!

Segunda análise: sairá por Arranjo ou Combinação?

1º Passo) Criando um resultado possível, podemos ter: (1 2 3)

2º Passo) Invertendo a ordem do resultado criado: (3 2 1)

3º Passo) A comparação: os resultados são distintos! Arranjo!

Arranjo de quantos em quantos? De 5 em subgrupos de 3. Teremos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5x4x3x2!}{2!} = 5x4x3 = 60 \rightarrow \text{Resposta!}$$

Ou seja, podemos formar 60 números com 3 algarismos distintos, dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Uma pergunta deveras oportuna seria: não dava para resolver essa questão pelo Princípio da Contagem?

Vejamos: nosso evento é formar um número de três algarismos distintos. Podemos dividi-lo em três etapas: definição do primeiro algarismo, definição do segundo e definição do terceiro.

Teremos:

1ª etapa) definição do primeiro algarismo: 5 resultados possíveis;

2ª etapa) definição do segundo algarismo: 4 resultados possíveis;

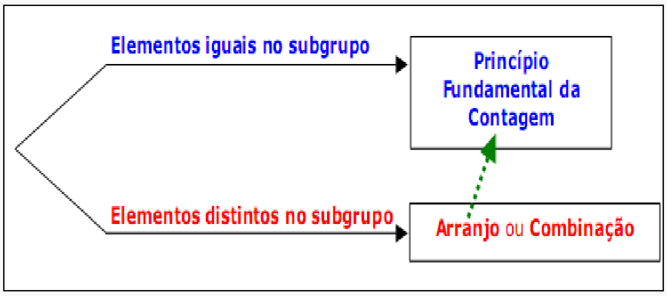
3ª etapa) definição do terceiro algarismo: 3 resultados possíveis.

Multiplicando-se os resultados parciais, teremos:

5 x 4 x 3= 60 – Resposta!

Mesma resposta que chegamos pelo Arranjo!

Olhemos de novo, e com mais calma, o diagrama dos caminhos de resolução:



Repare bem na seta que aponta para cima! Reparou?

O que ela quer indicar? O seguinte: se você descobrir que a questão deve ser resolvida por Arranjo, então poderá também resolvê-la pelo Princípio da Contagem!

Observe que se trata de uma seta com sentido único! De Arranjo para Princípio da Contagem! Apenas isso! O caminho de volta – Princípio da Contagem para Arranjo – nem sempre será possível!

E de Combinação para Princípio da Contagem? Dá certo? De jeito nenhum! Basta olhar para o desenho acima, e não tem erro! Ok?

Próxima pergunta recorrente: ora, se questão de Arranjo sai pelo Princípio da Contagem, então eu preciso mesmo saber esse tal de Arranjo? A resposta é SIM, você precisa!

Resolvendo questões por Combinação:

A fórmula da Combinação é a seguinte:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Onde:

- n é o número de elementos do conjunto universo; e
- p é o número de elementos do subgrupo.

Retornemos ao exemplo 03, apresentado anteriormente:

Exemplo:

Dispondo das seguintes espécies de frutas {maçã, mamão, melão, banana, pera, uva, laranja e melancia}, quantos tipos de saladas podem ser formados, contendo três tipos de frutas?

Primeira análise: os elementos do subgrupo podem ser iguais ou têm que ser distintos?

Distintos, pois, embora não dito isso expressamente pelo enunciado, fica claro que não podemos formar saladas com frutas iguais! Uma salada já é, por si, uma mistura de frutas de tipos diferentes! Daí, usaremos Arranjo ou Combinação!

Segunda análise: sairá por Arranjo ou Combinação?

1º **Passo)** Criando um resultado possível, podemos ter: (maçã, pera e uva)

2º **Passo)** Invertendo a ordem do resultado criado: (uva, pera e maçã)

3º **Passo)** A comparação: os resultados são iguais! - Combinação!

Combinação de quantos em quantos? De 8 (tipos de frutas do conjunto universo) em subgrupos de 3 (tipos de frutas da salada que formaremos!).

Teremos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \rightarrow C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!.5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!.3x2x1} = \frac{8x7x6}{3x2x1} = 56 \rightarrow \text{Resposta!}$$

Portanto, na combinação, diferentemente do Arranjo, os agrupamentos devem ser distintos, não importando a ordem.

Vejamos o exemplo abaixo:

A={1,2,3} forma os pares (1,2), (1,3) e (2,3).

Como você pode verificar, não houve par repetido. Basicamente é essa a diferença entre Combinação e Arranjo. É possível reduzir calcular rapidamente a quantidade de combinações usando a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Por exemplo, se tivermos um conjunto com 7 termos e quisermos formar combinações de 3 a 3:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!\ 4!} = 35$$

ESTUDO DIRIGIDO

01 **Responda:**

A) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas?

B) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que as três moças fiquem sempre juntas?

C) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que os três rapazes fiquem sempre juntos?

D) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que os três rapazes fiquem sempre juntos e as três moças fiquem sempre juntas?

E) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que as três moças fiquem separadas?

F) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que os três rapazes fiquem separados?

G) Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas poderemos colocá-los dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que rapazes e moças fiquem sempre alternados?

02 Durante a copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes podem existir?

a) 69
h) 2024
b) 9562
c) 12144
d) 13824

03 Num determinado setor de um hospital trabalham 5 médicos e 10 enfermeiros. Quantas equipes distintas, constituída cada uma de 1 médico e 4 enfermeiros, podem ser formadas nesse setor?
a) 210
b) 1050.
c) 5050
d) 10080
e) 25200

04 Quantas motos podem ser licenciadas se cada placa tiver 2 vogais (podendo haver vogais repetidas) e 3 algarismos distintos?
a) 25000
b) 120
c) 18000
d) 32000

05 Marcam-se 5 pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta r’ paralela a r. O número n de triângulos com vértices em 3 desses 13 pontos é dado por:

a) n = 230

b) n = 220

c) n = 320

d) n = 210

06 O número de anagramas da palavra **FUVEST** que começam e terminam por vogal é:
a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 144

07 Quantos anagramas têm a palavra **ECILA** em que as consoantes aparecem juntas e no começo?
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 24

08 Têm-se 12 livros, todos diferentes, sendo 5 de Matemática, 4 de Física e 3 de Química. De quantos modos podemos dispô-los sobre uma prateleira, devendo os livros de cada assunto permanecer juntos?
a) 103.680
b) 17.280
c) 150
d) 12
e) 6

09 Os organizadores de um torneio de tênis, do qual participariam 12 jogadores, resolveram dividir os participantes em grupos iguais de modo que, na primeira fase do torneio, em cada grupo, todos jogassem contra todos. Se os jogadores divididos em grupos de 4 participantes, seriam realizados m jogos na primeira fase do torneio. Se eles fossem divididos em grupos de 3, o número de jogos nessa fase seria igual a n. Assim, pode-se concluir que a diferença m e n é igual a:

a) 3

b) 6

c) 8

d) 9

e) 12

10 Julguem as sentenças abaixo:

( ) As 4 palavras da frase “Dançam conforme a música” podem ser rearranjadas de modo a formar novas frases de 4 palavras, com ou sem significado. Nesse caso, o número máximo dessas frases que podem ser formadas, incluindo a frase original, é igual a 16.

( ) Considerando todas as 26 letras do alfabeto, a quantidade de palavras de 3 letras que podem ser formadas, todas começando por U ou V, é superior a 2×10^3.

11 Em geral, empresas públicas ou privadas utilizam códigos para protocolar a entrada e a saída de documentos e processos. Considere que se deseja gerar códigos cujos caracteres pertencem ao conjunto das 26 letras de um alfabeto, que possui apenas 5 vogais. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

( ) Se os protocolos de uma empresa devem conter 4 letras, sendo permitida a repetição de caracteres, então podem ser gerados menos de 400.000 protocolos distintos.

( ) Se uma empresa decide não usar as 5 vogais em seus códigos, que poderão ter 1, 2 ou 3 letras, sendo permitida a repetição de caracteres, então é possível obter mais de 11.000 códigos distintos.

( ) O número total de códigos diferentes formados por 3 letras distintas é superior a 15.000.

12 Considerando que as matrículas funcionais dos servidores de um tribunal sejam formadas por 5 algarismos e que o primeiro algarismo de todas a matrículas seja o 1 ou o 2, então a quantidade máxima de matrículas funcionais que poderão ser formadas é igual a

a) 2×10^4.

b) 2×10^5.

c) 3×10^5.

d) 4×10^3.

e) 1×10^4.

13 Seja *N* o número de anagramas da palavra "AEIOUBCDF", cuja última letra à direita seja uma consoante. O valor de *N é:*

a) 8!

b) 4 · 7!

c) 4 · 8!

d) 4 · 9!

e) 9!

14 Na Mega-Sena são sorteadas seis dezenas de um conjunto de 60 possíveis (as dezenas sorteáveis são 01, 02,... , 60). Uma aposta simples (ou aposta mínima), na Mega-Sena, consiste em escolher 6 dezenas. Pedro sonhou que as seis dezenas que serão sorteadas no próximo concurso da Mega-Sena estarão entre as seguintes: 01, 02, 05, 10, 18, 32, 35, 45. O número mínimo de apostas simples para o próximo concurso da Mega-Sena que Pedro deve fazer para ter certeza matemática que será um dos ganhadores caso o seu sonho esteja correto é:

a) 8
b) 28.
c) 40
d) 60
e) 84

15 Em uma cidade, os números dos telefones têm 7 algarismos e não podem começar por 0. Os três primeiros números constituem o prefixo. Sabendo-se que em todas as farmácias os quatro últimos dígitos são zero e o prefixo não tem dígitos repetidos, então o número de telefones que podem ser instalados nas farmácias é igual a:

a) 504

b) 720

c) 684

d) 648.

e) 842

Considerando que uma palavra é uma concatenação de letras entre as 26 letras do alfabeto, que pode ou não ter significado, julgue os itens a seguir.

16 Com as letras da palavra COMPOSITORES, podem ser formadas mais de 500 palavras diferentes, de 3 letras distintas. ( )

17 A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60. ( )

18 Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham 3 letras das 26 do alfabeto, admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3 ( )

Julgue os itens que se seguem, a respeito de contagem.

19 Com as letras da palavra TROCAS é possível construir mais de 300 pares distintos de letras ( )

GABARITO:

1)	a) 720; g) 72	b) 144;	c) 144;	d) 72;	e) 576;	f) 576;
2-D	3-B	4- C	5-B	6-B	7-D	8-A
	9-B	10-EE		11-EEC	12-A	13-C
	14-B	15-D	16-C	17-C	18-E	19-E

PROBABILIDADE

Origem Histórica

É possível quantificar o acaso?

Para iniciar, vamos considerar algumas hipóteses: Rita espera ansiosamente o nascimento de seu filho, mas ela ainda não sabe qual será o sexo da criança. Em outro caso, antes do início de um jogo de futebol, o juiz tira "cara ou coroa" com uma moeda para definir o time que ficará com a bola. Numa terceira hipótese, toda semana, milhares de pessoas arriscam a sorte na loteria. Problemas como os acima são, hoje, objeto de estudo das probabilidades.

Os primeiros estudos envolvendo probabilidades foram motivados pela análise de jogos de azar. Sabe-se que um dos primeiros matemáticos que se ocupou com o cálculo das probabilidades foi Cardano (1501-1576). Data dessa época (na obra Liber Ludo Alae) a expressão que utilizamos até hoje para o cálculo da probabilidade de um evento (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis). Posteriormente tal relação foi difundida e conhecida como relação de Laplace.

Com Fermat (1601-1665) e Pascal (1623-1662), a teoria das probabilidades começou a evoluir e ganhar mais consistência, passando a ser utilizada em outros aspectos da vida social, como, por exemplo, auxiliando na descoberta da vacina contra a varíola no século XVIII.

Laplace foi, certamente, o que mais contribuiu para a teoria das probabilidades. Seus inúmeros trabalhos nessa área foram reunidos no monumental Tratado Analítico das Probabilidades, onde são introduzidas técnicas poderosas como a das funções geradoras, que são aproximações para probabilidades com o uso do cálculo integral.

Atualmente, a teoria das probabilidades é muito utilizada em outros ramos da Matemática (como o Cálculo e a Estatística), da Biologia (especialmente nos estudos da Genética), da Física (como na Física Nuclear), da Economia, da Sociologia, das Ciências Atuariais, da Informática, etc.

A roleta, um dos jogos de azar preferidos pelos apostadores nos cassinos, teve sua origem na França do século XVIII. É formada por 36 elementos dispostos em três colunas de 12 números e um espaço reservado para o zero. As chamadas apostas simples são: sair par ou sair ímpar, sair vermelho ou sair preto, e sair números menores (de 1 a 18) ou sair números maiores (de 19 a 36)

Exemplo: A probabilidade de ao lançarmos um dado sair um número ímpar é 1/2.

Esta definição a penas pode ser usada quando o conjunto dos casos é finito sendo que todos têm a mesma possibilidade ocorrer (equiprováveis)!

Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados experimentos aleatórios.

O lançamento de uma moeda;

O lançamento de um dado;

A retirada da carta de um baralho.

A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e, em geral, pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Espaço Amostral [U]

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Lançamento de uma moeda: U = {cara, coroa}

Lançamento de um dado: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Obs: Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento. No lançamento de um dado, por exemplo, em relação à face voltada para cima, podemos ter os eventos.

O número é ímpar: {1, 3, 5};

O número é menor que 4: {1, 2, 3};

O número é múltiplo de 7: { }.

Tipos de Eventos

Impossível → o evento é um conjunto vazio. (Jogar dois dados e a soma dar 13.)

Certo → o evento é o próprio espaço amostral. (Jogar um dado e retirar um número menor ou igual a 6.)

Simples → o evento é um conjunto unitário. (Jogar um dado e sair um número maior que 5.)

Complementares → O evento E_1mais o evento E_2 é igual ao próprio espaço amostral **U**. (E_1 : Jogar um dado e sair um número ímpar e E_2 : Jogar um dado e sair um número par. $E_1 \cup E_2$ = **U**) Indicamos o complementar de um evento A por $\bar{A}$.

Mutuamente Exclusivos → Evento E_1 intersecção evento E_2 é igual ao conjunto vazio. (E_1: Jogar um dado e sair um número menor que 3 e E_2: Jogar um dado e sair um número maior que 4. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$).

Evento em um Espaço Amostral Finito

Em um experimento aleatório em que cada um dos **n** eventos simples, do espaço amostral **U**, possui a mesma chance de ocorrência, dizemos que o espaço amostral é um **espaço equiprovável** e que a probabilidade de cada evento simples é 1/n.

Para um evento simples A, indicamos:

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{n(U)}}$$

Podemos ampliar essa definição de probabilidade de um evento simples para a probabilidade de um evento qualquer.

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}}$$

n(A) = número de elementos do evento **A**

n(U) = número de elementos do espaço amostral **U**

Exemplo: No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair o número 6?

Solução:

→ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

→ Chamando de A o evento "sair o número 6", temos: A = {6}.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Exemplo: No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair um número par?

Solução:

→ Como **U** é um espaço equiprovável e n(U) = 6, a probabilidade de cada evento simples é 1/6.

→ Chamando de A o evento "sair um número par", temos: A = {2, 4, 6}.

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Considere um conjunto de 8 frutas em que 3 estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente 2 frutas desse conjunto, determine a probabilidade de:

   a) ambas não estarem estragadas.

   b) pelo menos uma estar estragada.

Solução:

Item A

1°) Número de maneiras de escolher duas frutas entre as oito existentes.

→ Escolher um par de frutas {A, B} é igual a escolher um par {B, A}. Portanto, temos um caso de combinação.

$$n(U) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,.\,6!} = \frac{8\,.\,7}{2\,.\,1} = 28$$

2°) Número de maneiras de escolher duas frutas não estragadas. (Evento A)

→ Retirando-se das 8 frutas as 3 estragadas, temos um total de 5 frutas, portanto:

$$n(A) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2\,.\,1} = 10$$

Obs: continuamos com um caso de combinação.

2°) Cálculo da probabilidade do evento A ocorrer:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

Item B

"Pelo menos uma estragada" significa que podemos ter uma fruta estragada ou as duas estragadas. (Evento B)

→ Esse evento **B** é o complementar $\bar{A}$ do evento A.

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(U) \quad [\div\ n(U)]$$

$$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\overline{A})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{14}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{9}{14}$$

Obs: Sejam A e Ā dois eventos complementares de um espaço amostral **U**, então:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

2. Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter 2 caras? Qual é a probabilidade de se obter pelo menos 2 caras?

Solução:

Admitindo C para cara e K para coroa, temos:

U = {(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C) , (K, K, K)}

Evento A: obter duas caras.

A = {(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)}

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{8}}$$

Evento B: obter pelo menos duas caras.

B = {(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, C, C)}

$$\boxed{P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}}$$

Probabilidade Condicional

Considere um espaço amostral U e dois eventos A e B. Indicamos a probabilidade condicional P(A/B) como a chance do evento A ocorrer uma vez que B já tenha ocorrido. Nesse caso, dizemos que a ocorrência do evento A está condicionada à ocorrência do evento B.

Exemplo: Considere o lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima.

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Sejam os eventos:

A: ocorrer um número par.

B: ocorrer um número maior ou igual a 3. P(A / B) será a probabilidade de ocorrer número par uma vez que a face voltada para cima é um número maior ou igual a 3.

Solução:

B = {3, 4, 5, 6}

Os casos favoráveis ao evento A uma vez que o evento B ocorreu são:

A = {4, 6}

Portanto,

$$P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ou seja,}$$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

n(A ∩ B) → número de elementos do conjunto A ∩ B .

n(B) → número de elementos do conjunto B.

ou

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$P(A \cap B) \rightarrow$ probabilidade dos eventos A e B ocorrerem simultaneamente.

$P(B) \rightarrow$ probabilidade do evento B ocorrer. No caso desse exemplo temos:

$$P(A/B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Probabilidades Discretas

Experimento Aleatório: Dizemos que um experimento qualquer é aleatório quando, se repetido diversas vezes nas mesmas condições, pode gerar resultados diferentes.

Experimentos aleatórios acontecem a todo momento no nosso cotidiano perguntas do tipo: será que vai chover? Qual será o resultado da partida de futebol? Quantos serão os ganhadores da Mega-Sena da semana? São questões associadas a experimentos aleatórios e que dependem do acaso. Experimentos aleatórios são os objetos de estudo do cálculo de probabilidades.

Espaço Amostral: (ou de casos ou resultados): de uma experiência é o conjunto de todos os resultados possíveis.

Acontecimento ou evento: é qualquer subconjunto do espaço amostral.

A probabilidade de um acontecimento E, que é um subconjunto finito de um espaço amostral S, de resultados igualmente prováveis, é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

sendo n(E) e n(S) as quantidades de elementos de E e de S, respectivamente.

Combinação de eventos

Teorema: Seja E um evento no espaço amostral S. A probabilidade do acontecimento complementar,

$\overline{E}$, é dada por: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$

Teorema: Sejam E1 e E2 dois eventos do mesmo espaço amostral S. Então:

$$p(E1 \cup E2) = p(E1) + p(E2) - p(E1 \cap E2)$$

Exemplo:

Qual a probabilidade de um número inteiro positivo selecionado aleatoriamente do conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a 100 ser divisível por 2 ou por 5?

Solução:

Sabemos que no Universo dos inteiros positivos, inferiores ou iguais a 100 (n(S) = 100), a quantidade de números divisíveis por 2 é 50 (os pares) e a quantidade dos números divisíveis por 5 é 20 (os terminados em zero ou em cinco). Sendo que os que são divisíveis ao mesmo tempo por 2 ou por 5 (os múltiplos de 10) são 10. Logo, teremos:

$$p(E_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$p(E_2) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$Logo, p(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$$

Eventos Independentes

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral U, diremos que A independe de B se a ocorrência de B não afetar a probabilidade de A. No caso de dois eventos independentes A e B, a probabilidade de os mesmos ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de cada um ocorrer isoladamente.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exemplo:

Lançando sucessivamente uma moeda eum dado, qual a probabilidade de se obter o resultado (coroa, 1)?

Admitindo C = cara e K = coroa temos o seguinte espaço amostral:

U = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3) , (K, 4), (K, 5), (K, 6)}

Portanto,

$$P(K, 1) = \frac{1}{12}$$

Agora imaginem cada evento isoladamente:

A: Sair coroa

B: Sair o número 1

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Exercícios Resolvidos

1. Uma urna contém 10 bolas pretas e 8 bolas vermelhas. Retiramos três bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de as duas primeiras serem pretas e a terceira vermelha?

   Sol:

$$\text{A: a 1ª bola é preta} \rightarrow P(A) = \frac{10}{18}$$

$$\text{B: a 2ª bola é preta} \rightarrow P(B) = \frac{9}{17}$$

$$\text{C: a 3ª bola é vermelha} \rightarrow P(C) = \frac{8}{16}$$

Portanto,

$$P = \frac{10}{18} \bullet \frac{9}{17} \bullet \frac{8}{16} = \frac{5}{34}$$

2. Retirando-se uma carta de um baralho comum (52 cartas) e sabendo-se que saiu uma carta de ouros, qual a probabilidade de que seja um rei?

A: sair um rei {4 cartas]

B: sair uma carta de ouros {13 cartas}

A∩ B: sair um rei de ouros {1 carta}

P(A/B): probabilidade de sair um rei no universo das cartas de ouros.

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{1}{13}$$

ESTUDO DIRIGIDO

Texto para às questões 01 e 02.

Em um estudo para determinar a paternidade de uma criança, foi possível reduzir o universo de prováveis pais a somente três homens: João, José e Pedro. Existe um teste sanguíneo de compatibilidade, cujo resultado pode ser positivo ou negativo. O laboratório que realiza o teste informa que, a com base em testes realizados anteriormente, quando uma criança é testada juntamente com seu verdadeiro pai, o resultado positivo em 90% das vezes. Porém, é possível que, quando uma criança é testada juntamente com um homem que não é seu pai, o resultado seja também positivo. Segundo o laboratório, isso ocorre 15% das vezes. Suponha que João, José e Pedro sejam igualmente prováveis de terem concebido a criança considerada.

01) Se João e a criança forem testados, a probabilidade de o resultado ser positivo será de

a) 0,150
b) 0,300
c) 0,333
d) 0,400
e) 0,900

02) Se João e a criança são testado, e o resultado é positivo, as probabilidades de João e de José serem os pais da criança são, respectivamente:

a) 0,750 e 0.
b) 0,750 e 0,125.
c) 0,900 e 0,150.
d) 0,900 e 0,333.
e) 1 e 0.

03) Carlos e Maria são candidatos a contratação em uma empresa. Sabendo que Carlos tem 1/3 de probabilidade de ser contratado, que Maria tem 1/2 de probabilidade de ser contratada e que a probabilidade de ambos serem contratados é 1/6, julgue os itens a seguir.

( ) A probabilidade de qualquer um deles ser contratado é 1/2.

( ) A probabilidade de um deles não ser contratado é 5/6.

04) A probabilidade é um ramo da Matemática que surgiu no início do século XVII para tratar dos jogos de azar da época, como os jogos de dados, cartas e loteria, que permanecem até hoje. Nesse sentido, considere uma loteria de 6 números e somente u**m prêmio a ser concedido. Suponha também que** o número de bilhetes que cada indivíduo pode comprar seja menor do que a quantidade de números da loteria. Com base nessas condições, julgue os itens abaixo.

( ) Se um indivíduo adquire 2 bilhetes para uma só extração, então a probabilidade de ele ganhar algum prêmio é maior que 1/2.

( ) Um indivíduo que adquire 2 bilhetes, um para cada uma de duas extrações, tem probabilidade entre 0,6 e 0,8 de não ganhar prêmio algum.

05) Em 2005, a ANCINE coordenou a mostra de filmes brasileiros no Ano do Brasil na França. No 17.º Encontro de Cinematografia da América Latina, que ocorreu entre 11 e 20 de março de 2005, em Toulouse, foi programada a exibição de um lote de 16 filmes de longa metragem brasileiros. Considerando essas informações, julgue os itens que se seguem.

( ) Suponha que as cópias de 4 desses 16 filmes estivessem com defeito. Nesse caso, a probabilidade de que 3 outras cópias, retiradas aleatória e sucessivamente desse lote de filmes, não estivessem com defeito é superior a 0,36.

06) Em uma certa comunidade existem dois jornais J e P. Sabe-se que 5.000 pessoas são assinantes do jornal J, 4.000 pessoas são assinantes do jornal P, 1.200 pessoas são assinantes de ambos e 800 não lêem jornal. Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja assinante de ambos os jornais?

a) 15%
b) 13,95%
c) 12%
d) 10%
e) 5%

07) Numa caixa são colocados vários cartões, alguns amarelos, alguns verdes e os restantes pretos. Sabe-se que 50% dos cartões são pretos, e que, para cada três cartões verdes, há cinco cartões pretos. Retirando-se ao acaso um desses cartões, a probabilidade de que este seja amarelo é de:

a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 40%

08) Lança-se um dado não-tendencioso até que sejam obtidos dois resultados consecutivos iguais. Qual a probabilidade de o dado ser lançado exatamente três vezes?

a) 1/2

b) 1/6

c) 1/9

d) 5/36

e) 1/36

09) Lançando-se um dado duas vezes, a probabilidade de ser obtido o par de valores 2 e 3, em qualquer ordem, é de:

a) 1/6

b) 1/9

c) 1/12

d) 1/15

e) 1/18

10) Das 180 pessoas que trabalham em uma empresa, sabe-se que 40% têm nível universitário e 60% são do sexo masculino. Se 25% do número de mulheres têm nível universitário, a probabilidade de selecionar-se um funcionário dessa empresa que seja do sexo masculino e não tenha nível universitário é:

a) 5/18

b) 3/10

c) 2/9

d) 1/5

GABARITO

1. D
2. B
3. EC
4. EC
5. C
6. B
7. E
8. D
9. E
10. B

ESTATÍSTICA

Objeto da estatística

Estatística é uma ciência exata que visa fornecer subsídios ao analista para coletar, organizar, resumir, analisar e apresentar dados. Trata de parâmetros extraídos da população, tais como média ou desvio padrão.

A estatística fornece-nos as técnicas para extrair informação de dados, os quais são muitas vezes incompletos, na medida em que nos dão informação útil sobre o problema em estudo, sendo assim, é objetivo da Estatística extrair informação dos dados para obter uma melhor compreensão das situações que representam.

Quando se aborda uma problemática envolvendo métodos estatísticos, estes devem ser utilizados mesmo antes de se recolher a amostra, isto é, deve-se planejar a experiência que nos vai permitir recolher os dados, de modo que, posteriormente, se possa extrair o máximo de informação relevante para o problema em estudo, ou seja para a população de onde os dados provêm.

Quando de posse dos dados, procura-se agrupa-los e reduzi-los, sob forma de amostra, deixando de lado a aleatoriedade presente. Seguidamente o objetivo do estudo estatístico pode ser o de estimar uma quantidade ou testar uma hipótese, utilizando-se técnicas estatísticas convenientes, as quais realçam toda a potencialidade da Estatística, na medida em que vão permitir tirar conclusões acerca de uma população, baseando-se numa pequena amostra, dando-nos ainda uma medida do erro cometido.

População e amostra

Qualquer estudo científico enfrenta o dilema de estudo da população ou da amostra. Obviamente teria-se uma precisão muito superior se fosse analisado o grupo inteiro, a população, do que uma pequena parcela representativa, denominada amostra.

Observa-se que é impraticável na grande maioria dos casos, estudar-se a população em virtude de distâncias, custo, tempo, logística, entre outros motivos. A alternativa praticada nestes casos é o trabalho com uma amostra confiável.

Se a amostra é confiável e proporciona inferir sobre a população, chamamos de inferência estatística. Para que a inferência seja válida, é necessária uma boa amostragem, livre de erros, tais como falta de determinação correta da população, falta de aleatoriedade e erro no dimensionamento da amostra.

Quando não é possível estudar, exaustivamente, todos os elementos da população, estudam-se só alguns elementos, a que damos o nome de Amostra.

Quando a amostra não representa corretamente a população diz-se enviesada e a sua utilização pode dar origem a interpretações erradas.

Gráfico de distribuição

Distribuição de frequência

Quando da análise de dados, é comum procurar conferir certa ordem aos números tornando-os visualmente mais amigáveis. O procedimento mais comum é o de divisão por classes ou categorias, verificando-se o número de indivíduos pertencentes a cada classe.

1. Determina-se o menor e o maior valor para o conjunto.

2. Definir o limite inferior da primeira classe (Li) que deve ser igual ou ligeiramente inferior ao menor valor das observações.

3. Definir o limite superior da última classe (Ls) que deve ser igual ou ligeiramente superior ao maior valor das observações.

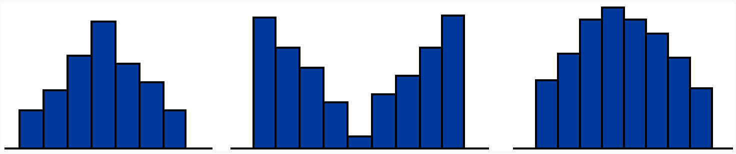
4. Definir o número de classes (K), que será calculado usando $k = \sqrt{n}$. Obrigatoriamente deve estar compreendido entre 5 a 20.

5. Conhecido o número de classes define-se a amplitude de cada classe:

6. Com o conhecimento da amplitude de cada classe, define-se os limites para cada classe (inferior e superior)

Distribuições simétricas

A distribuição das frequências faz-se de forma aproximadamente simétrica, relativamente a uma classe média.

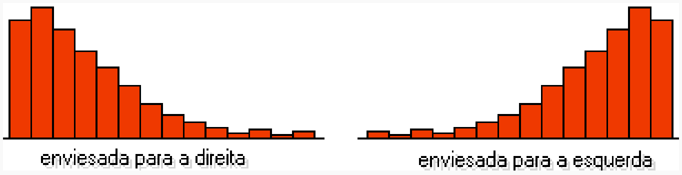


Caso especial de uma distribuição simétrica

Quando dizemos que os dados obedecem a uma distribuição normal, estamos tratando de dados que distribuem-se em forma de sino.

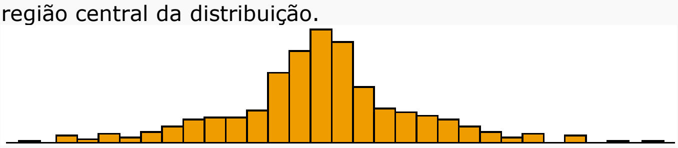
Distribuições Assimétricas

A distribuição das frequências apresenta valores menores num dos lados:



Distribuições com "caudas" longas

Observamos que nas extremidades há uma grande concentração de dados em relação aos concentrados na região central da distribuição.



Média, moda e mediana

Medidas de tendência Central

As mais importante medidas de tendência central, são a média aritmética, média aritmética para dados agrupados, média aritmética ponderada, mediana, moda, média geométrica, média harmônica, quartis. Quando se estuda variabilidade, as medidas mais importantes são: amplitude, desvio padrão e variância.

Medidas	
Média aritmética	$\frac{x_1 + \dots x_n}{n}$
Média aritmética para dados agrupados	$\frac{f_1 . x_1 \dots f_k . x_k}{f_1 \dots f_k}$
Média aritmética ponderada	$\frac{P_1 . (X_1) + P_2 . (X_2)}{P_{total}}$
Mediana	1) Se *n* é impar, o valor é central, 2) se *n* é par, o valor é a média dos dois valores centrais
Moda	Valor que ocorre com mais frequência.
Média geométrica	$G = \sqrt[n]{X_1 . X}$
Média harmônica	$\frac{n}{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1}$
Quartil	$Q = [p(sup) - 0{,}25].x(inf) + [0{,}25 - p(inf)] x \frac{(sup)}{p(sup)} - p(inf)$

Sendo a média uma medida tão sensível aos dados, é preciso ter cuidado com a sua utilização, pois pode dar uma imagem distorcida dos dados. Pode-se mostrar, que quando a distribuição dos dados é "normal", então a melhor medida de localização do centro, é a média. Sendo a Distribuição Normal uma das distribuições mais importantes e que surge com mais frequência nas aplicações, (esse fato justifica a grande utilização da média).

A média possui uma particularidade bastante interessante, que consiste no seguinte: se calcularmos os desvios de todas as observações relativamente à média e somarmos esses desvios o resultado obtido é igual a zero.

A média tem uma outra característica, que torna a sua utilização vantajosa em certas aplicações: Quando o que se pretende representar é a quantidade total expressa pelos dados, utiliza-se a média. Na realidade, ao multiplicar a média pelo número total de elementos, obtemos a quantidade pretendida.

Moda

Define-se moda como sendo: o valor que surge com mais frequência se os dados são discretos, ou, o intervalo de classe com maior frequência se os dados são contínuos. Assim, da representação gráfica dos dados, obtém-se imediatamente o valor que representa a moda ou a classe modal. Esta medida é especialmente útil para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos, apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana.

Mediana

A mediana, é uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, definida do seguinte modo: Ordenados os elementos da amostra, a mediana é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Para a sua determinação utiliza-se a seguinte regra, depois de ordenada a amostra de n elementos: Se n é ímpar, a mediana é o elemento médio. Se n é par, a mediana é a semissoma dos dois elementos médios.

Considerações a respeito de Média e Mediana

Se se representarmos os elementos da amostra ordenada com a seguinte notação: X1:n , X2:n , ... , Xn:n então uma expressão para o cálculo da mediana será: Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados. 1- Quando a distribuição é simétrica, a média e a mediana coincidem. 2- A mediana não é tão sensível, como a média, às observações que são muito maiores ou muito menores do que as restantes (outliers). Por outro lado a média reflete o valor de todas as observações.

Como já vimos, a média ao contrário da mediana, é uma medida muito influenciada por valores "muito grandes" ou "muito pequenos", mesmo que estes valores surjam em pequeno número na amostra. Estes valores são os responsáveis pela má utilização da média em muitas situações em que teria mais significado utilizar a mediana.

A partir do exposto, deduzimos que se a distribuição dos dados: 1. for aproximadamente simétrica, a média aproxima-se da mediana 2. for enviesada para a direita (alguns valores grandes como "outliers"), a média tende a ser maior que a mediana 3. for enviesada para a esquerda (alguns valores pequenos como "outliers"), a média tende a ser inferior à mediana.

Variância e Desvio-padrão

Variância

Define-se a variância, como sendo a medida que se obtém somando os quadrados dos desvios das observações da amostra, relativamente à sua média, e dividindo pelo número de observações da amostra menos um.

$$\Sigma \frac{(x1 - média)^2}{n - 1}$$

Desvio-padrão

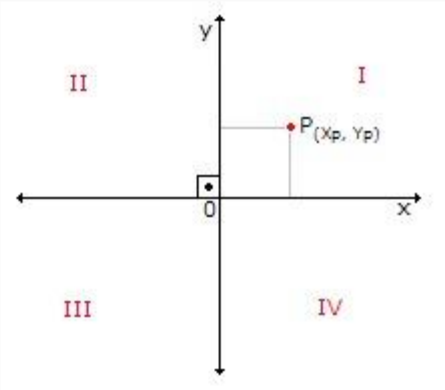
Uma vez que a variância envolve a soma de quadrados, a unidade em que se exprime não é a mesma que a dos dados. Assim, para obter uma medida da variabilidade ou dispersão com as mesmas unidades que os dados, tomamos a raiz quadrada da variância e obtemos o desvio padrão: O desvio padrão é uma medida que só pode assumir valores não negativos e quanto maior for, maior será a dispersão dos dados. Algumas propriedades do desvio padrão, que resultam imediatamente da definição, são: o desvio padrão será maior, quanta mais variabilidade houver entre os dados.

$$\sqrt{\Sigma \frac{(x1 - média)^2}{n - 1}}$$

GEOMETRIA ANÁLITICA

Plano Cartesiano

Para começar o estudo da geometria analítica, é necessário conhecer o **Plano Cartesiano**:



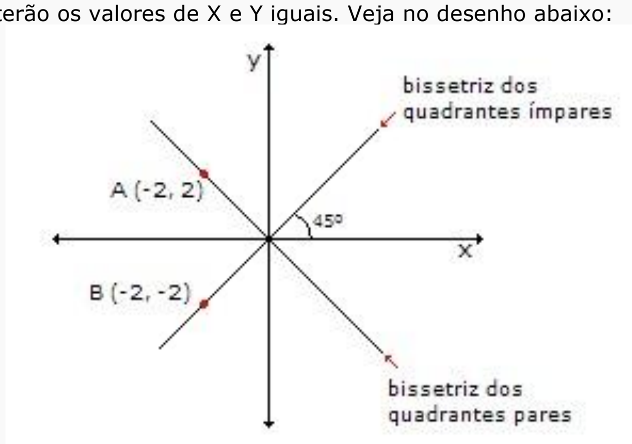
O Eixo Y (linha vertical) é chamado de **eixo das ordenadas**, enquanto que o Eixo X (linha horizontal) é chamado de **eixo das abscissas**. O ponto P (ponto vermelho da figura) possui duas **coordenadas**: X e Y , que indicam em que lugar dos eixos das ordenadas e abscissas ele se encontra. Representa-se isso por (Xp, Yp).

Os números romanos nos cantos mostram os quadrantes do plano cartesiano. Os pontos do eixo X que estão nos quadrantes II e III são negativos, enquanto que em I e IV são positivos. Os valores de Y nos quadrantes I e II são positivos, e nos restantes (III e IV), esses valores são negativos.

Bissetrizes

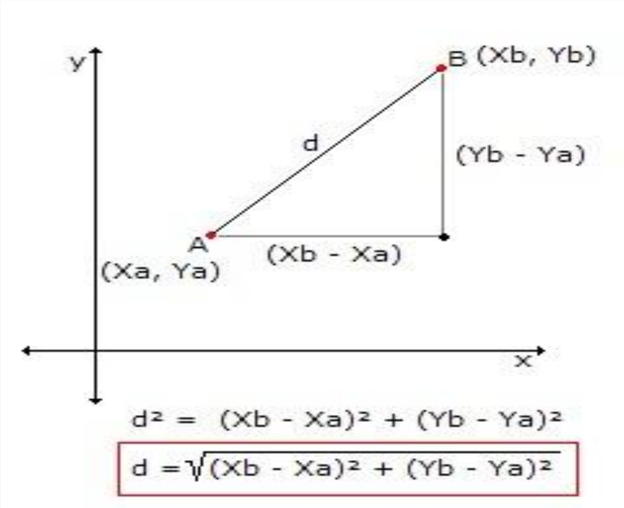
As bissetrizes são retas que cortam exatamente o centro do plano cartesiano (ponto (0, 0)), e formam um ângulo de 45º com os eixos X e Y. As coordenadas dos pontos que estão sobre a bissetriz que se encontra nos quadrantes pares são sempre opostos (se X for positivo, Y será negativo, e vice-versa).

Já os pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, terão os valores de X e Y iguais. Veja no desenho abaixo:



Distância entre dois pontos

Se soubermos as coordenadas de dois pontos no plano cartesiano (ponto A e B), é possível determinar a sua distância, utilizando o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$)

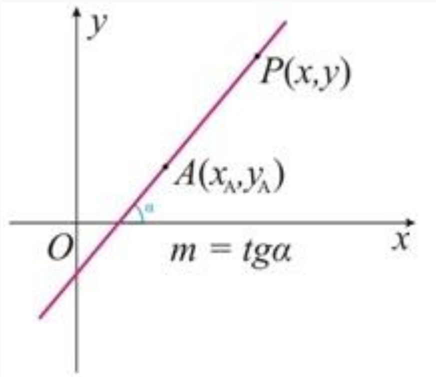


Equação da Reta

Equação fundamental da reta

Podemos representar uma reta r do <u>plano</u> cartesiano por meio de uma equação. Essa equação pode ser obtida a partir de um ponto $A(x_A, y_A)$ e do <u>coeficiente</u> angular m dessa reta.

Considere uma reta r não-<u>vertical</u>, de coeficiente angular m, que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$. Vamos obter a <u>equação</u> dessa reta, tomando um ponto P(x, y) tal que P ≠ A.



A equação fundamental da reta é:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

Equação geral da reta

Toda reta r do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo:

$$ax + by + c = 0$$

Em que:

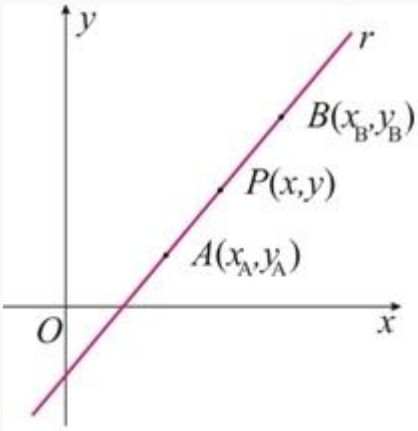
- a, b, e c são números reais;
- a e b não são simultaneamente nulos.

Podemos obter a equação geral de uma reta r conhecendo dois pontos não coincidentes de r:

$$A(x_a, y_a) \text{ e } B(x_b, y_b)$$

Para isso, usa-se a condição de alinhamento de A e B com um ponto genérico P(x,y) de r.

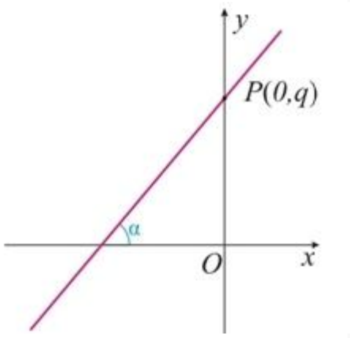
$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow ax + by + c = 0$$



Equação reduzida da reta

Vamos determinar a equação da reta r que passa por Q(0,q), e tem coeficiente angular m = tg(α):

$$y - q = m(x - 0$$
$$y - q = mx$$
$$y = mx + q$$



Toda equação na forma y = mx + q é chamada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular e q a ordenada do ponto n qual a reta cruza o eixo Oy.

A equação reduzida pode ser obtida diretamente da equação geral ax + by + c = 0:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow by = -ax - c$$

Onde:

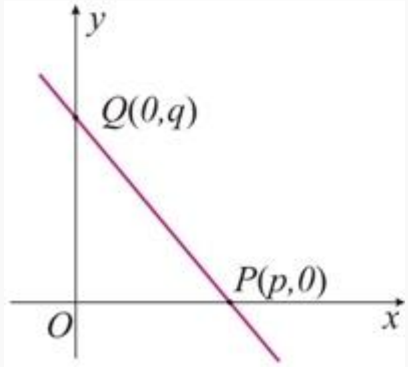
$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$x = \frac{-a}{b}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

Equação segmentária da reta

Considere uma reta r que cruza os eixos cartesianos nos pontos (0, q) e (p, 0).



Vamos escrever a equação da reta r:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow qx + py - pq \rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo essa equação por pq, obtemos a equação segmentária da reta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

ESTUDO DIRIGIDO

1) 52 pessoas discutem a preferência por dois produtos A e B, entre outros e conclui-se que o número de pessoas que gostavam de B era:

I. O quádruplo do número de pessoas que gostavam de A e B;
II. O dobro do número de pessoas que gostavam de A;
III. A metade do número de pessoas que não gostavam de A nem de B.

Nestas condições, o número de pessoas que não gostavam dos dois produtos é igual a:

a) 48
b) 35
c) 36
d) 47
e) 37

2) 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16, S. Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e , desses 5, 3 visitaram também São Paulo. O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

a) 29
b) 24
c) 11

d) 8

e) 5

3) Se um conjunto A possui 1024 subconjuntos, então o cardinal de A é igual a:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 9

e) 10

4) Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y. Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 0

5) Sendo a e b números reais quaisquer, os números possíveis de elementos do conjunto A = {a, b, {a}, {b}, {a,b} } são:

a) 2 ou 5

b) 3 ou 6

c) 1 ou 5

d) 2 ou 6

e) 4 ou 5

6) Seja f(x) = ax + b; se os pares ordenados (1,5) Î f e (2,9) Î f então podemos afirmar que o valor do produto (a + b) (10a + 5b) é igual a:

a) 225

b) 525

c) 255

d) 100

e) 1000

7) A função f é tal que f(2x + 3) = 3x + 2. Nestas condições, f(3x + 2) é igual a:

a) 2x + 3

b) 3x + 2

c) (2x + 3) / 2

d) (9x + 1) /2

e) (9x - 1) / 3

8) O conjunto imagem da função y = 1 / (x - 1) é o conjunto:

a) R - { 1 }

b) [0,2]

c) R - {0}

d) [0,2)

e) (-¥ ,2]

9) A função f é definida por f(x) = ax + b. Sabe-se que f(-1) = 3 e f(3) = 1, então podemos afirmar que f(1) é igual a:

a) 2

b) -2

c) 0

d) 3

e) -3

10) A função f é definida por f(x) = ax + b. Sabe-se que f(-1) = 3 e f(3) = 1, então podemos afirmar que f(1) é igual a:

a) 2

b) -2

c) 0

d) 3

e) -3

11) Uma função real é tal que f(x). f(y) = f(x + y) , f(1) = 3 e f(Ö3) = 4. O valor de f(2 + Ö3) é:

a) 18

b) 24

c) 36

d) 42

e) 48

12) A diferença entre dois números é 8. Para que o produto seja o menor possível, um deles deve ser:

a) 16

b) 8

c) 4

d) -4

e) -16

13) Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:

a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $3x^2 + 55 = 0$

c) $x^2 - 6x = 0$

d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

14) Achar as raízes das equações:

a) $x^2 - x - 20 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $x^2 - 8x + 7 = 0$

15) Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60º.

16) Quando o ângulo de elevação do sol é de 65 º, a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício. (sen 65º = 0,9063, cos 65º = 0,4226 e tg 65º = 2,1445)

17) Quando o ângulo de elevação do sol é de 60º, a sombra de uma árvore mede 15m. Calcule a altura da árvore, considerando $\sqrt{3} = 1,7$.

18) Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32º. A altura do edifício é aproximadamente: (sen 32º = 05299, cos 32' = 0,8480 e tg 32º = 0,6249)

a) 28,41m

b) 29,87m

c) 31,24 m

d) 34,65 m

19) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

a) 2 km

b) 3 km

c) 4 km

d) 5 km

20) Um foguete é lançado sob um ângulo de 30 º. A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

21) Do alto de um farol, cuja altura é de 20 m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30º. A que distância, aproximadamente, o navio se acha do farol? (Use $\sqrt{3} = 1,73$)

22) Num exercício de tiro, o alvo está a 30 m de altura e, na horizontal, a 82 m de distância do atirador. Qual deve ser o ângulo (aproximadamente) de lançamento do projétil? (sen 20º = 0,3420, cos 20º = 0,9397 e tg 20º = 0,3640)

23) Se cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60 º, calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

24) O sétimo termo de uma PA é 20 e o décimo é 32. Então o vigésimo termo é

a) 60
b) 59
c) 72
d) 80

25) O número de termos de uma PA, cuja razão é 9, o primeiro termo é 4 e o último 58, é

a) 3
b) 4
c) 5
d) 7

26) A soma dos 40 primeiros números naturais é igual a

a) 400
b) 410
c) 780
d) 800

27) A soma dos termos da PG (5, 50, ..., 500000) é

a) 222 222
b) 333 333
c) 444 444
d) 555 555

28) Numa cidade de 50000 habitantes, 42000 têm menos de 40 anos de idade. Qual é a porcentagem dos que têm 40 anos ou mais?

29) Quais são os juros simples produzidos por um capital de R$ 7200,00 empregados a 10% ao ano, durante 5 anos?

30) A que taxa anual foi empregado o capital de R$ 108.000,00 que, em 130 dias, rendeu juros simples de R$ 3.900,00?

31) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12
b) 18
c) 36
d) 72

32) Na direção de uma empresa existem 5 brasileiros e 4 alemães. Quantas comissões de três pessoas podemos formar, tendo cada uma delas:

a) 2 brasileiros e 1 alemão?

b) pelo menos 1 alemão?

33) 3! + 2! é igual a:

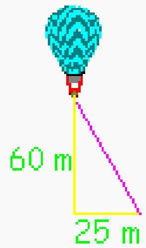
a) 120
b) 32
c) 5
d) 8

34) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

35) Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?

36) Uma roda gigante tem 8 metros de raio. Quanto percorrerá uma pessoa na roda gigante em 6 voltas?

37) Considerando a seguinte figura, determina o comprimento da corda que segura o balão:



38) Calcula a área do seguinte triângulo:

GABARITO

N	Respostas
1	A
2	A
3	E
4	A
5	A
6	A
7	D
8	C
9	A
10	A
11	C
12	C
13	a = 5 ; b = -3 ; c = -2 (completa) a = 3 ; b = 0 ; c = 55 (incompleta) a = 1 ; b = -6 ; c = 0 (incompleta) a = 1 ; b = -10 ; c = 25 (completa)
14	x' = 5 e x'' = -4 x' = 4 e x'' = -1 x' = 7 e x'' = 1
15	$3\sqrt{3}$ e 3
16	38,6m
17	25,5m
18	31,24m
19	4 km
20	6 km
21	34,6m
22	20º
23	$10\sqrt{3}$
24	C
25	D
26	D
27	D
28	16%
29	R$ 3600,00.
30	A taxa é de 10% ao ano
31	C
32	a) 40 b) 74
33	D
34	A bola ser verde é $^{5}/_{12}$
35	0,25, ou ainda 25%
36	96 METROS
37	65 metros
38	108 cm²