Grupo Evolução

Matemática 2

EJA

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Centro Educacional Evolução

Credenciado pela Portaria nº. 264/2009 SEDF

Tel: (61) 3562 0920 / 3046 2090

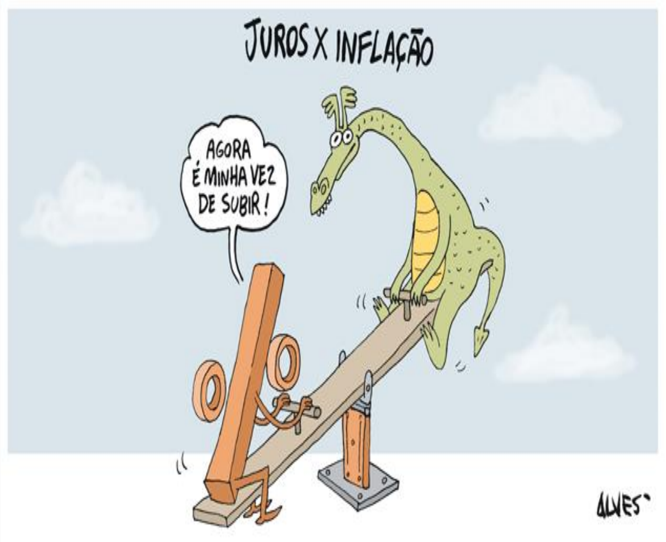
C-1 Lote 1/12 sobreloja 1 Edifício TTC

Taguatinga-DF

www.centroevolucao.com.br

TENHO DÚVIDAS
JÁ ESTUDEI

MÓDULO II



SEQUÊNCIAS

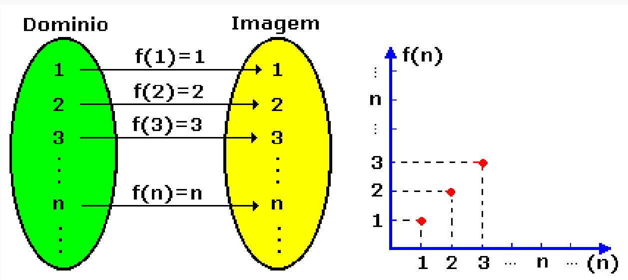
Sequência reais: Uma sequência real (ou sucessão) é uma função f : N ⟶ R que associa a cada número natural n um número real f(n). O valor numérico f(n) é o termo de ordem n da sequência.

Do modo como definimos a sequência, o domínio de f é um conjunto infinito, mas o contradomínio poderá ser finito ou infinito.

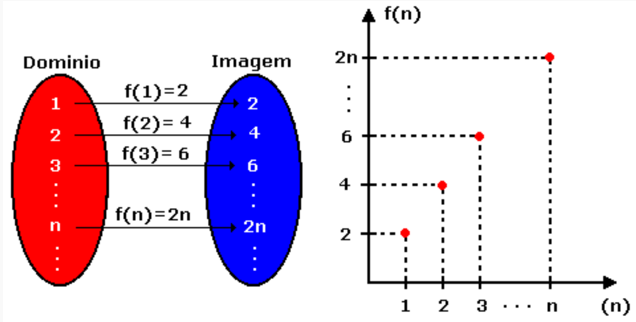
O domínio de uma sequência é indicado por Dom(f) = N e a imagem de uma sequência por Im(f) = {a_1, a_2, a_3, ...}.

Exemplos importantes de sequências reais:

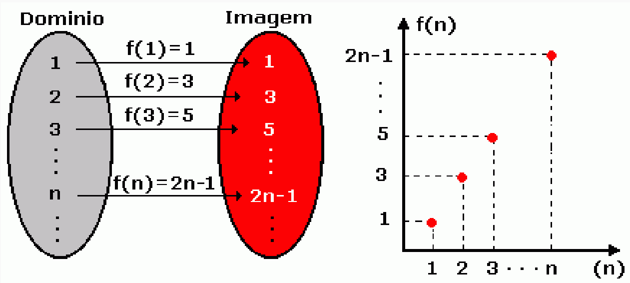
Função identidade: Seja f : N ⟶ R definida por f(n) = n. Esta função pode ser representada graficamente de várias formas, sendo que duas delas estão mostradas abaixo, com o diagrama de Venn-Euler (esquerda) e o gráfico cartesiano (direito). Neste caso, Dom(f) = N e Im(f) = {1, 2, 3, ...}



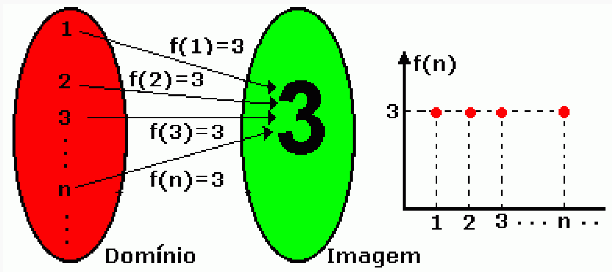
Sequência de números pares: Seja f : N ⟶ R definida por f(n) = 2n. Neste caso Im(f) = {2, 4, 6, ...}. Duas representações gráficas para esta sequência, são:



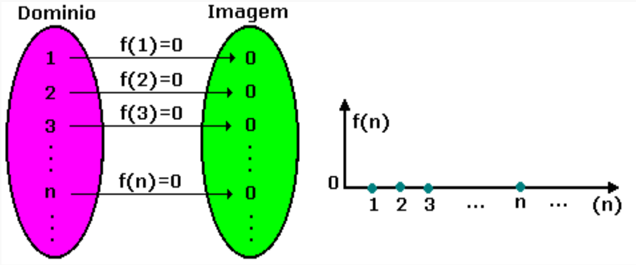
Sequência de números ímpares: A função f : N ⟶ R definida por f(n) = 2n - 1, está representada abaixo e a sua imagem é Im(f) = {1, 3, 5, ...}.



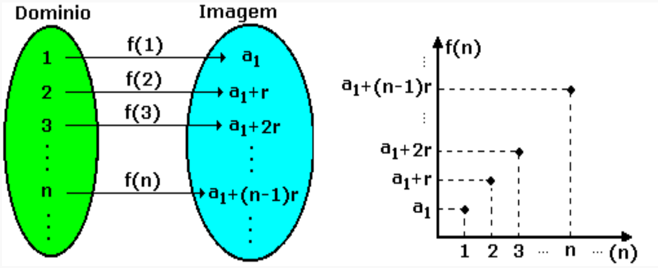
Sequência constante: Uma sequência constante é uma função f : N ⟶ R definida, por exemplo, por f(n) = 3 e pode ser representada graficamente por: Neste caso, Im(f) = {3}



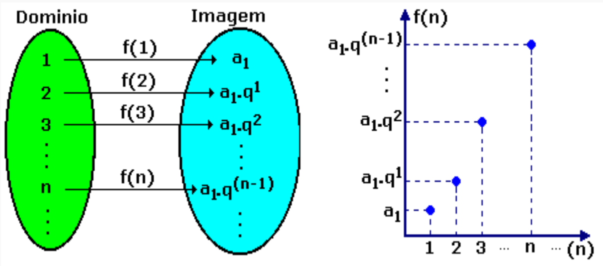
Sequência nula: A sequência nula f : N ⟶ R é definida por f(n) = 0. A imagem é o conjunto Im(f) = {0}. f pode ser vista graficamente como:



Sequência aritmética: A sequência aritmética f : N⟶R é definida por: f(n) = a1 + (n – 1)r e pode ser vista com os gráficos abaixo: Neste caso: Im(f) = {a1,a1 + r,a1 + 2r,...,a1 + (n – 1) r,...}.



Sequência geométrica: Uma sequência geométrica é uma função f : N⟶R definida por: f(n) = a_1q^{n-1} que pode ser esboçada graficamente por: Aqui Im(f) ={a_1, a_1q, a_1q^2, ... ,a_1q^{n-1}, ...}.



Sequência finitas e infinitas:

- Sequência Finita: Uma sequência é finita se o seu conjunto imagem é um conjunto finito.
-
- Sequência Infinita: Uma sequência é infinita se o seu conjunto imagem é um conjunto infinito.

Progressão Aritmética (PA)

Definição: É uma sucessão de termos

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots,$$

finita ou infinita, sendo que, a partir do 2º termo inclusive, a diferença entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante *r*, denominada razão da progressão, ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = r$$

As seguintes sequências são exemplos de P.A.:

a) $(2, 7, 12, 17, 22 \ldots) \Rightarrow a_1 = 2$ e $r = 5$

b) $(x, x+2t, x+4t, x+6t \ldots) \Rightarrow a_1 = x$ e $r = 2t$

c) $(5, 5, 5, 5, 5 \ldots) \Rightarrow a_1 = 5$ e $r = 0$

d) $\left(7, \frac{15}{2}, 8, \frac{17}{2}, 9 \ldots\right) \Rightarrow a_1 = 7$ e $r = \frac{1}{2}$

e) $(8, 5, 2, -1, -4 \ldots) \Rightarrow a_1 = 8$ e $r = -3$

Classificação

As progressões aritméticas podem ser classificadas de acordo com o valor da razão *r*:

$r > 0 \Rightarrow$ P.A. crescente
$r = 0 \Rightarrow$ P.A. constante ou estacionária
$r < 0 \Rightarrow$ P.A. decrescente

Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.A. da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Observe que cada termo é obtido adicionando-se ao primeiro um número de razões *r* igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r = a_1 + (2-1)r \\
a_3 &= a_1 + 2r = a_1 + (3-1)r \\
a_4 &= a_1 + 3r = a_1 + (4-1)r \\
\dots & \dots \\
a_n &= \quad \cdots \quad = a_1 + (n-1)r
\end{aligned}
$$

O termo de ordem *n* da P.A. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= r \\
a_3 - a_2 &= r \\
a_4 - a_3 &= r \\
\dots \quad \dots & \dots \\
a_n - a_{n-1} &= r \\
\hline
a_n - a_1 &= (n-1)
\end{aligned}
$$

Somando membro a membro estas *n* **– 1** igualdades obtemos a expressão do termo de ordem *n*.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

que é a mesma equação anteriormente encontrada.

Propriedades

Numa P.A. cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo precedente e o termo seguinte. Com efeito, se

$$\dots\ a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ \dots$$

são termos consecutivos de uma P.A., então podemos escrever:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

ou seja,

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

e

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Em qualquer P.A. limitada, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é constante e igual à soma dos próprios extremos.

Seja pois a P.A. limitada, com n termos, razão r, e A e B os termos equidistantes dos extremos, conforme ilustrado a seguir:

$$\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\dots,\ A}_{p\ \text{termos}}\ ,\dots,\ \underbrace{B\ ,\dots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\ \text{termos}}$$

Pela fórmula do termo geral,

$$A = a_1 + (p-1)r$$

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B\ ,\dots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\ \text{termos}}$$

temos pela fórmula de termo geral,

$$
\begin{aligned}
a_n &= B + (p-1)r \\
A - a_n &= a_1 - B \\
A + B &= a_1 + a
\end{aligned}
$$

Em uma P.A. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média aritmética dos extremos. Neste caso temos:

$$\underbrace{\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\dots,\ A}_{p\ \text{termos}}\ ,\ M,\ \underbrace{B\ ,\dots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\ \text{termos}}}_{\text{P.A. com } n=2p+1 \text{ termos}}$$

$$M = \frac{A+B}{2}$$

e

$$A + B = a_1 + a_n$$

Logo,

$$M = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Soma dos n primeiros termos de uma P.A. Com relação a P.A.:

$$\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\dots,\ a_{n-2}\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{n\ \text{termos}}\ ,\ a_{n+1}\ ,\dots$$

podemos escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

ou, invertendo-se a ordem das parcelas,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

onde temos n parênteses. No entanto, todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$. Logo,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

e

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo: Para obter a soma dos 30 primeiros termos da PA definida por C = {2, 5, 8, ... , 89}. Aqui $a_1=2$, r=3 e n=30. Aplicando a fórmula da soma, obtida acima, temos: Sn = $(a_1+an)n/2$ = (2+89)×30/2 = (91×30)/2 = 1365

Progressão Geométrica (PG)

Definição: É uma sucessão de termos

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots,$$

finita ou infinita, sendo que , a partir do 2º termo inclusive, a razão entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante q, denominada razão da progressão, ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

As sequências a seguir são exemplos de P.G.:

(1 , 4 , 16 , 64 , ...) $a_1 = 1$ e $q = 4$

(x , xt^2 , xt^4, xt^6, ...) $a_1 = x$ e $q = t^2$

(8 , 2 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ...) $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{4}$

(7 , 7 , 7 , 7 , ...) $a_1 = 7$ e $q = 1$

-4 , 8 , -16 , 32 , ...) $a_1 = 4$ e $q = -2$

As Progressões Geométricas são formadas por uma seqüência numérica, onde estes números são definidos (exceto o primeiro) utilizando a constante q, chamada de razão. O próximo número da P.G. é o número atual multiplicado por q.

Exemplo:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...), onde a razão é 2

A razão pode ser qualquer número racional (positivos, negativos, frações). Para descobrir qual a razão de uma PG, basta escolher qualquer número da seqüência, e dividir pelo número anterior.

Formula do Termo Geral

A seguinte fórmula pode ser utilizada para encontrar qualquer valor de uma seqüência em progressão geométrica:

$a_n = a_1 . q^{(n - 1)}$

onde a é um termo, então a_1 refere-se ao primeiro termo. No lugar de n colocamos o número do termo que queremos encontrar.

Exemplo:

q = 2

$a_1 = 5$

para descobrir, por exemplo, o termo a_{12}, faremos:

$a_{12} = 5 . 2^{(12 - 1)}$

$a_{12} = 5 . 2^{11}$

$a_{12} = 5 . 2048 = 10240$

Classificação

a) $\left.\begin{matrix} q>0 \text{ e } q>1 \\ \text{ou} \\ q<0 \text{ e } 0<q<1 \end{matrix}\right\}$ P.G. crescente

b) $\left.\begin{matrix} q<0 \text{ e } q>1 \\ \text{ou} \\ q>0 \text{ e } 0<q<1 \end{matrix}\right\}$ P.G. decrescente

c) $\forall a_1$ e $q<0$ P.G. alternante

d) $\forall a_1$ e $q=0$ ☐ P.G. constante ou estacionária

Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.G. da seguinte forma:

$$\frac{a_2}{a_1}=q \Rightarrow a_2=a_1q$$

$$\frac{a_3}{a_2}=q \Rightarrow a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3}=q \Rightarrow a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q \Rightarrow a_n=a_{n-1}q=\ldots=a_1q^{n-1}$$

Observe que cada termo é obtido multiplicando-se o primeiro por uma potência cuja base é a razão. Note que o expoente da razão é igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q &&= a_1q^{2-1} \\ a_3 &= a_1q^2 &&= a_1q^{3-1} \\ a_4 &= a_1q^3 &&= a_1q^{4-1} \\ &\text{- - - - - - - - - -} \\ a_n &= \ldots &&= a_1q^{n-1} \end{aligned}$$

O termo de ordem n da P.G. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{matrix} \dfrac{a_2}{a_1}=q & \dfrac{a_2}{a_1}=q \\ \dfrac{a_3}{a_2}=q & \dfrac{a_3}{a_2}=q \\ \dfrac{a_4}{a_3}=q & \dfrac{a_4}{a_3}=q \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q & \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q \end{matrix}$$

Multiplicando membro a membro estas $n-1$ igualdades obtemos a expressão do termo de ordem n

$$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\ldots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=q^{n-1}$$

Fazendo os cancelamentos, obtemos:

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$$

o que nos leva a

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

Propriedades

Numa P.G. cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo precedente e o termo seguinte. Realmente, se

$$\ldots a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ldots$$

são termos consecutivos de uma P.G., então podemos escrever:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ou seja,

E

$$a_n = \pm\sqrt{a_{n-1} \times a_{n+1}}$$

Onde os sinais (+) ou (−) são usados de acordo com as características da P.G. Numa P.G. limitada, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Seja então a P.G. limitada, com n termos, razão q, e A e B os termos eqüidistantes dos extremos, conforme mostrado logo a seguir:

$$\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots,\ A}_{p\ \text{termos}}\ ,\ \ldots,\ \underbrace{B\ ,\ \ldots,\ a_{n-1}\ ,}_{p\ \text{termos}}$$

Pela fórmula do termo geral,

$$A = a_1 q^{p-1}$$

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B\ ,\ \ldots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\ \text{termos}}$$

temos pela fórmula do termo geral,

$$\boxed{a_n = Bq^{p-1}}$$

Fazendo a divisão membros a membro resulta:

$$\frac{A}{a_n} = \frac{a_1}{B}$$

o que nos leva a:

$$AB = a_1 \times a_n$$

Em uma P.G. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média geométrica dos extremos. Neste caso temos:

$$\underbrace{\underbrace{a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots,\ A}_{p\ \text{termos}}\ ,\ M\ ,\ \underbrace{B\ ,\ \ldots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n}_{p\ \text{termos}}}_{\text{P.G. com } n=2p+1 \text{ termos}}$$

$$M = \sqrt{AB}$$

e

$$AB = a_1 \times a_n$$

logo,

$$M = \pm\sqrt{a_1 \times a_n}$$

Soma dos n primeiros termos de uma P.G. com relação a P.G.

$$\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n}_{n\ \text{termos}},\ a_{n+1},\ \ldots,$$

podemos escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros por q resulta:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \ldots + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq$$

o que é equivalente a

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$$

Fazendo a seguinte subtração, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

ou já que

$$a_{n+1} = a_1 q^n,$$

E

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\ (q \neq 1)$$

Exemplos:

Para obter os termos da PG = {3, 9, 27, 81}, devemos obter a razão desta PG e como esta é obtida pela divisão do termo posterior pelo termo anterior, temos que q = 9/3 = 3. Como a_1=3 e n=4, substituímos os dados na formula da soma dos termos de uma PG finita, obtemos:

$$S_4 = 3.\ (3^4-1)/(3-1) = 3(81-1)/2 = 3 \times 80/2 = 120$$

Para obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PG cuja razão é q = 1 e a_1 = 2, podemos identificar a PG com o conjunto X = {2, 2, 2, 2, 2}. Como a razão da PG é q = 1, temos que a soma dos seus termos é obtida por $S_5 = 2 \times 5 = 10$.

ESTUDO DIRIGIDO

01) Numa PG de 4 termos, a razão é 5 e o último termo é 375. Calcular o primeiro termo dessa PG.

02) Numa PG de 6 termos, o primeiro termo é 2 e o último termo é 486. Calcular a razão dessa PG.

03) A soma de três números em PG é 39 e o produto entre eles é 729. Calcular os três números

TRIGONOMETRIA

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em torno da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido.

A **trigonometria**, palavra formada por três radicais gregos: **tri** (três), **gonos** (ângulos) e **metron** (medir), têm por objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo.

Medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, facilmente atendida no caso de envolver pontos próximos. Basta verificar quantas vezes uma dada unidade de medida está contida no comprimento a ser medido. Este é o princípio dos instrumentos mais comuns para medir comprimentos: réguas, fitas métricas, trenas, etc.

Por que estudar Trigonometria?

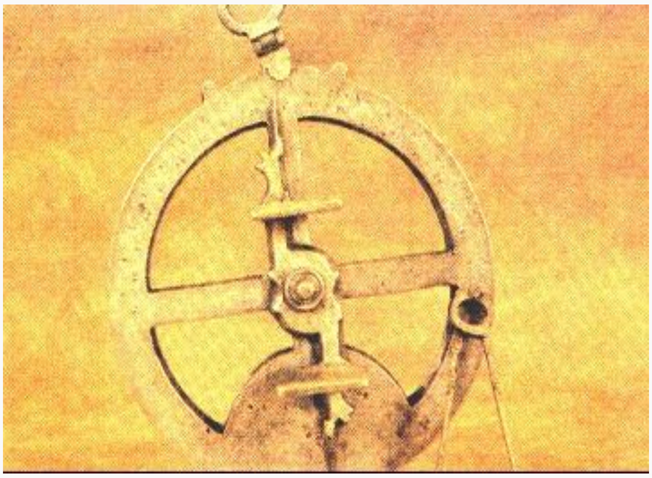
Há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como análise, e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil etc.

Observem algumas situações:

- Você já parou para imaginar como os navegadores da antiguidade faziam para calcular a que distância da terra eles encontravam-se enquanto navegavam?
- Seria impossível medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Pode-se dizer que foi a Astronomia a grande impulsionadora da Trigonometria, pois foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C – 125 a.C) quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Na Grécia antiga, entre os anos de 190 a.C. e 125 a.C., viveu Hiparco, um matemático que construiu a primeira tabela trigonométrica. Esse trabalho foi muito importante para o desenvolvimento da Astronomia, pois facilitava o cálculo de distâncias inacessíveis, o que lhe valeu o título de PAI DA TRIGONOMETRIA.



Astrolábio - Um dos mais antigos instrumentos científicos, que teria surgido no século III a.C. A sua invenção é atribuída ao matemático e astrônomo grego Hiparco.

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

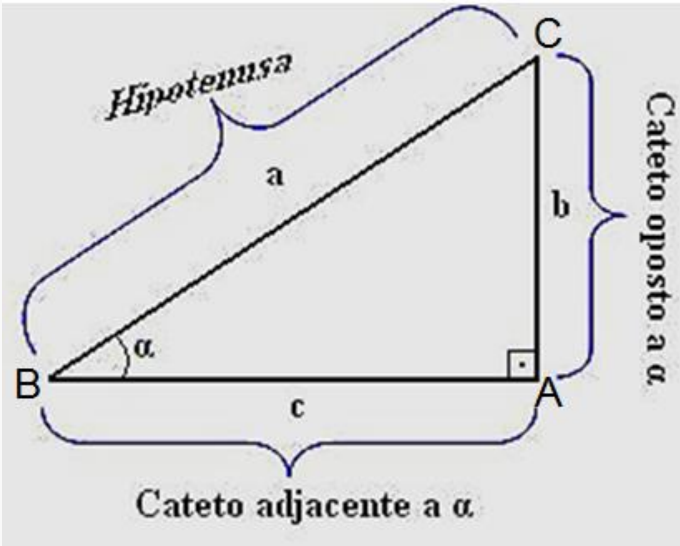
$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan B = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } B}{\text{cateto adjacente ao ângulo } B} = \frac{b}{c}$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Ao tomarmos um ângulo agudo como referência de um triângulo retângulo, as razões podem ser chamadas por nomes especiais. São eles: seno, cosseno e tangente. Tomando o ângulo A como referência no triângulo ABC, temos que:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

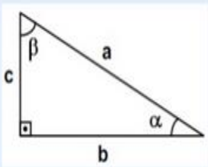
Ângulos Arbitrários

Secante é a razão inversa do **Cosseno** $= \sec \hat{B} = \frac{1}{\cos \hat{B}} = \frac{a}{c}$

Cossecante é a razão inversa do **Seno** $= \text{cossec } \hat{B} = \frac{1}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{a}{b}$

Cotangente é a razão inversa do **Tangente** $= \cot \text{g}\hat{B} = \frac{1}{\text{tg}\hat{B}} = \frac{c}{b}$

A razão de um ângulo agudo num triângulo retângulo é igual à co-razão do outro ângulo agudo desse triângulo (e vice-versa)
($\alpha + \beta = 90$)



Circulo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com intervalo de [0, 2π], a cada ponto da circunferência associamos um número real. No ciclo trigonométrico trabalhamos três tipos de simetria: em relação ao eixo vertical (seno), eixo horizontal (cosseno) e em relação ao centro.

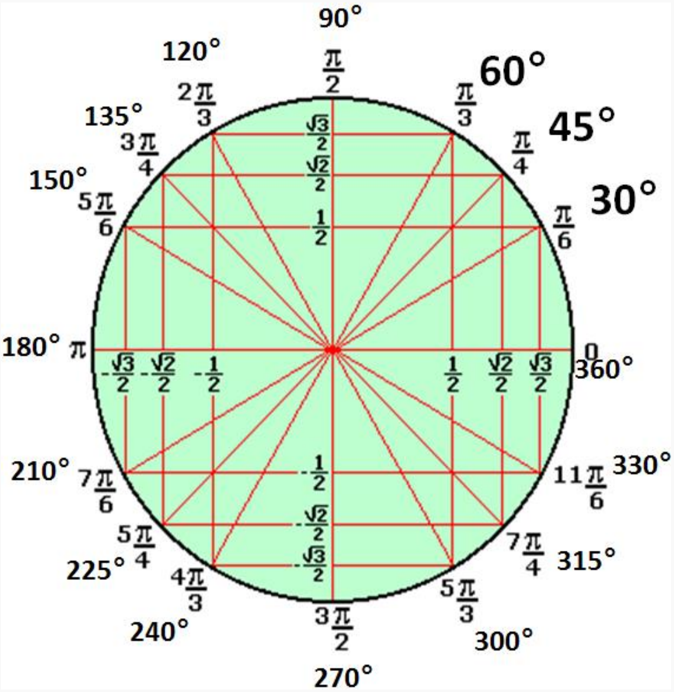
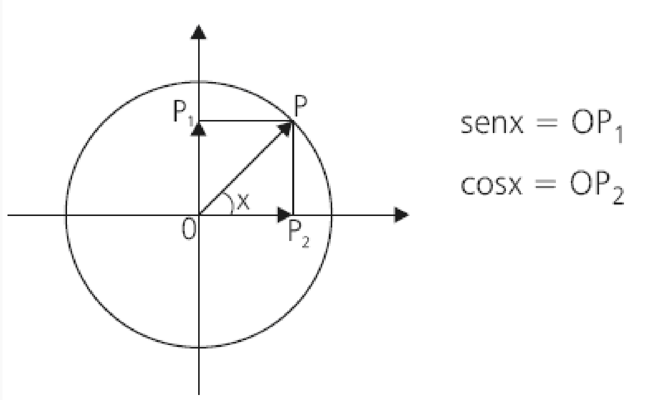


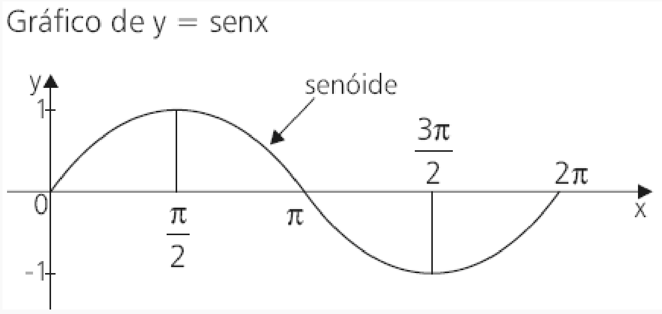
Tabela de relações Trigonométricas

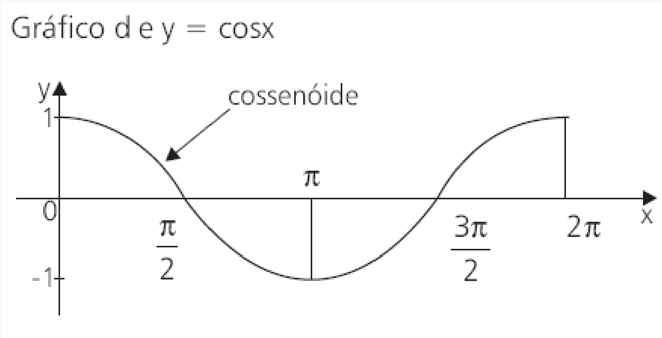
Com base em algumas deduções geométricas e cálculos matemáticos, conseguimos calcular as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º do triângulo retângulo. A partir dos cálculos efetuados construímos a seguinte tabela de relações trigonométricas:

x	(30°) $\frac{\pi}{6}$	(45°) $\frac{\pi}{4}$	(60°) $\frac{\pi}{3}$
senx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Função Seno e Cosseno

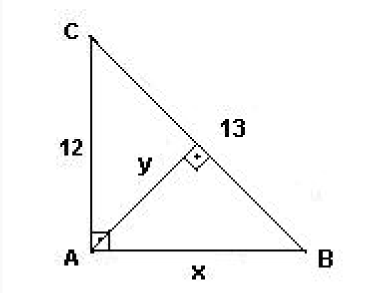






Exercícios resolvidos

- Indique os valores literais indicado na figura:



Resolução:

$13^2 = 12^2 + x^2$

$169 = 144 + x^2$

$X^2 = 25$

$X = 5$

Aplicando Pitágoras h = a.c

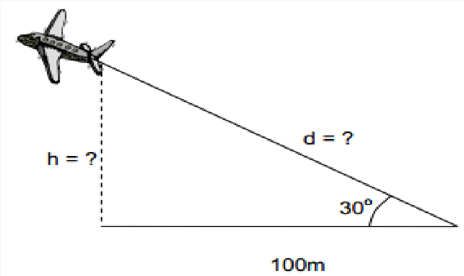
$5 \cdot 12 = 13$

$Y = 60/13$

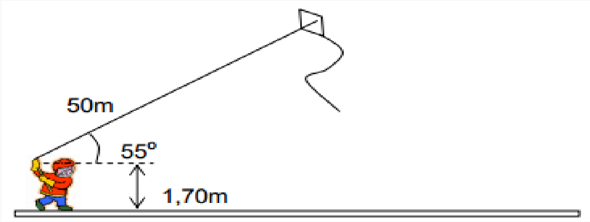
Lembrete: TC - Teorema dos cossenos: Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do angulo que eles formam.

ESTUDO DIRIGIDO

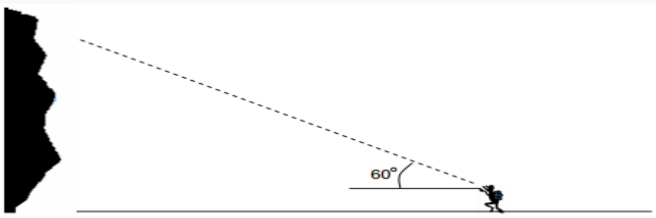
1. Um avião decola com ângulo de 30º com a horizontal. Utilizando as informações da figura abaixo, determine a distância percorrida pelo avião em linha reta e a altura na qual se encontra.



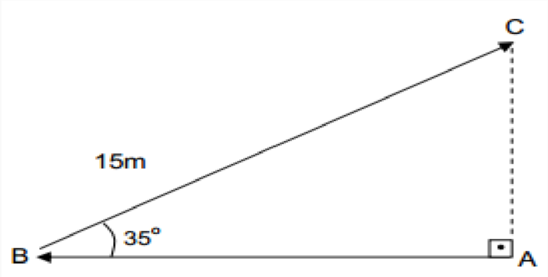
2. Na figura abaixo podemos observar um menino soltando uma pipa. O vento permite que o fio fique esticado fazendo com a horizontal um ângulo de 55º. Considerando que as mãos do garoto estão a uma altura de 1,70m do chão, a que altura está a pipa quando se desenrolar 50m de fio? (Adote sen 55º= 0,82; cos 55º = 0,57; tang 55º = 1,43.)



3. Um alpinista pretende escalar a encosta de uma montanha. Ele se afasta horizontalmente 80m do pÈ da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 60º com o plano horizontal. Considerando que o alpinista tem uma altura de 1,80m, qual a altura da encosta.



4. Um homem parte da posição A vai até a posição B e logo em seguida dirige-se para a posição C. Calcule a distância entre os pontos de partida e de chegada. (Adote sen 35º = 0,57 ; cos 35º = 0,82)



GABARITO:

1. d = 115m, h = 57m
2. h = 42,7m
3. h = 140,2m
4. x = 8,55m

MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira é uma ferramenta útil para investimentos financeiros. Num país de economia estabilizada, 0,6% de rendimento mensal em poupança é pouco, fazendo com que uma pequena parte dos poupadores tenham uma remuneração "alta" (e, valor absoluto, claro).

A palavra matemática significa a técnica de pensar, tem origem em:

"matema" = arte de pensar.

"tica"= técnica.

A palavra aritmética significa técnica dos números, tem origem em:

"aritmus" = número.

"tica"= técnica.

O termo estatística, que influencia no setor financeiro, provém do termo estatal, técnica de governo. Entre os conceitos de matemática financeira podemos destacar:

- **moeda** = papel moeda e peça metálica;
- **moeda bancária** = aquela em circulação no serviço bancário e a moeda em nível de circulação nacional;
- **fluxo de caixa** = visualização de data de pagamento e recebimento. O balanço é distribuído em cálculo no decorrer da linha de tempo.
- **Capitalização:** É o processo de acumulação dos juros ao recurso financeiro aplicado ou investido, a certa taxa de rentabilidade. E as diferentes formas como esses juros são gerados são chamdos regimes de capitalização.
- **Capital:** é o valor aplicado através de alguma operação financeira. Também conhecido como: Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado.
- **Juros:** representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes: simples ou compostos, ou até mesmo, com algumas condições mistas. O cálculo do juros simples possui cálculo linear e o composto em curva, após determinado ponto o composto rende mais.

REGIME	PROCESSO DE FUNCIONAMENTO
Simples	Somente o principal rende juros.
Compostos	Após cada período, os juros são incorporados ao capital, proporcionando juros sobre juros.

Resumindo:

1. **Matemática Financeira:** é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira a um Fluxo de Caixa.

PORCENTAGEM

É frequente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades. Alguns exemplos:

- A gasolina teve um aumento de 15% Significa que em cada R$100 houve um acréscimo de R$15,00

- O cliente recebeu um desconto de 10% em todas as mercadorias. Significa que em cada R$100 foi dado um desconto de R$10,00

- Dos jogadores que jogam no Grêmio, 90% são craques.
  Significa que em cada 100 jogadores que jogam no Grêmio, 90 são craques.

Razão centesimal

Toda a razão que tem para consequente o número 100 denomina-se **razão centesimal**. Alguns exemplos:

$$\frac{7}{100}, \frac{16}{100}, \frac{125}{100}, \frac{210}{100}$$

Podemos representar uma razão centesimal de outras formas:

$$\frac{7}{100} = 0{,}07 = 7\% \qquad \text{(lê-se "sete por cento")}$$
$$\frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\% \qquad \text{(lê-se "dezesseis por cento")}$$
$$\frac{125}{100} = 1{,}25 = 125\% \qquad \text{(lê-se "cento e vinte e cinco por c}$$

As expressões 7%, 16% e 125% são chamadas **taxas centesimais** ou **taxas percentuais**.

Considere o seguinte problema:

João vendeu 50% dos seus 50 cavalos. Quantos cavalos ele vendeu?
Para solucionar esse problema devemos aplicar a taxa percentual (50%) sobre o total de cavalos.

$$50\% \text{ de } 50 = \frac{50}{100}.50 = \frac{2500}{100} = 25 \text{ cavalos}$$

Logo, ele vendeu 25 cavalos, que representa a **porcentagem** procurada.

Portanto, chegamos a seguinte definição:

Porcentagem é o valor obtido ao aplicarmos uma taxa percentual a um determinado valor.

Exemplos:

- *Calcular 10% de 300.*

$$10\% \text{ de } 300 = \frac{10}{10\cancel{0}}.30\cancel{0} = 30$$

- *Calcular 25% de 200kg.*

$$25\% \text{ de } 200 = \frac{25}{10\cancel{0}}.20\cancel{0} = 50$$

Logo, 50kg é o valor correspondente à porcentagem procurada.

EXERCÍCIOS:

1) Um jogador de futebol, ao longo de um campeonato, cobrou 75 faltas, transformando em gols 8% dessas faltas. Quantos gols de falta esse jogador fez?

$$8\% \text{ de } 75 = \frac{8}{100}.75 = \frac{600}{100} = 6$$

Portanto o jogador fez 6 gols de falta.

2) Se eu comprei uma ação de um clube por R$250,00 e a revendi por R$300,00, qual a taxa percentual de lucro obtida?

Montamos uma equação, onde somando os R$250,00 iniciais com a porcentagem que aumentou em relação a esses R$250,00, resulte nos R$300,00.

$$250 + 250.\frac{x}{100} = 300$$
$$2{,}5.x = 300 - 250$$
$$x = \frac{50}{2{,}5}$$
$$x = 20$$

Portanto, a taxa percentual de lucro foi de 20%.

Uma dica importante: o **FATOR DE MULTIPLICAÇÃO**.

Se, por exemplo, há um <u>acréscimo</u> de 10% a um determinado valor, podemos calcular o novo valor apenas multiplicando esse valor por **1,10**, que é o fator de multiplicação. Se o acréscimo for de 20%, multiplicamos por **1,20**, e assim por diante. Veja a tabela abaixo:

Acréscimo ou Lucro	Fator de Multiplicação
10%	1,10
15%	1,15
20%	1,20
47%	1,47
67%	1,67

Exemplo: Aumentando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 * 1,10 = **R$ 11,00**

No caso de haver um <u>decréscimo</u>, o fator de multiplicação será:
Fator de Multiplicação = 1 - taxa de desconto (na forma decimal)

Veja a tabela abaixo:

Desconto	Fator de Multiplicação
10%	0,90
25%	0,75
34%	0,66
60%	0,40
90%	0,10

Exemplo: Descontando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 * 0,90 = **R$ 9,00**

Regimes de Capitalização

A Caderneta de Poupança, por exemplo, paga 6% a.a. ao depositante (veja que o depositante aqui é quem empresta dinheiro ao banco).

Mas as sutilezas, com o desenvolvimento das relações comerciais, vão se refinando.

Uma pergunta: No caso da Caderneta de Poupança, isto significa que quem depositar seu dinheiro lá irá receber R$ 6,00 por cada R$ 100,00 somente quando seu depósito fizer um ano?

Nada impediria que fosse assim. Quem quiser emprestar dinheiro e pôr a mão nos juros após um ano de empréstimo pode fazer isto.

Mas, combinou-se outra coisa: a Caderneta de Poupança iria pagar todo mês.

Mas aí vem uma pergunta: como isso? Se eu tenho um contrato com a Caixa Econômica de receber 6% ao ano, como é que ela vai pagar ao mês?

É assim mesmo, pois entra aí outra coisa nova: o regime de capitalização.

O que é isto? Nada de mais, apenas quer dizer que, embora o contrato diga que os juros serão pagos ao depositante à taxa de 6%a.a. (R$ 6,00 de juros a cada ano para R$ 100,00 depositados), combinou-se que o cálculo será feito à taxa equivalente a cada mês de decurso do empréstimo, pelo tempo em meses combinado entre as partes em que estiver valendo a operação.

O regime de capitalização, no nosso exemplo, é mensal. Equivale a dizer 'todo mês faça o cálculo do juro'.

Então, o equivalente a um mês de uma taxa de 6%a.a. é 6 a.a./12, ou seja, 0,5% a.m.

A taxa de 6% a.a. então é dita 'taxa nominal', pois é uma taxa só de nome. Ela, integralmente, não serve ao cálculo efetivo de juro. E esta divisão por 12 é uma convenção também. Poderia ser feita de outro jeito, mas combinou-se assim. Uma divisão simples.

Por conseqüência, a verdadeira taxa da Caderneta de Poupança é 0,5% a.m. e é esta que deve ser incluída no cálculo.

Então, o juro da Caderneta de Poupança deve ser calculado - como todo juro -conforme a fórmula clássica:

$j = C \times 0,5 \times n.$

Juros Simples

Chamamos de juros a compensação econômica recebida pela aplicação de um capital C a uma taxa de juros i, durante um determinado período de tempo n. Se essa taxa de juros incide somente sobre um único capital C, ao final do período de tempo n, dizemos que esses juros são JUROS SIMPLES.

A fórmula clássica para o cálculo de juro simples é:

$$J=Cin$$

n = prazo,

J = juros,

C = capital,

i = taxa.

Agora, se alguém empresta dinheiro a 3% a.m., isto significa por convenção (combinação, acordo, trato entre pessoas) que para cada R$ 100,00 embutidos no valor do empréstimo, R$ 3,00 deverão ser pagos como aluguel desse dinheiro todo o mês.

A sigla 'a.m.', então, é uma combinação (convenção) entre pessoas, que quer dizer 'ao mês', 'todo mês', 'por mês'.

Poderia ser 'a.a.', que significaria 'ao ano', 'por ano'.

Então, simplesmente - caso seja uma taxa 'a.m.' - a gente multiplica o que se ganha de juro pelo tempo em meses que o dinheiro ficou à disposição de quem o tomou.

Se o tomador permanecer 3 meses com o dinheiro do empréstimo, terá de pagar 3 x j, ou seja, C.i x 3, que pode se entendido que ele pagará três vezes mais juros do que alguém que ficaria apenas um período.

Mas vamos tratar de 'n' valendo 1 mês para construirmos nossa história. Assim, ainda não precisamos escrevê-lo na fórmula. Vamos entender que o 'contrato' é de um período apenas. Pode ser o empréstimo por apenas um mês.

OBSERVAÇÕES:
JUROS EXATOS: usar ano civil (365 ou 366 para bissextos), meses com número real de dias.
JUROS COMERCIAIS ou ORDINÁRIOS: mês com 30 dias, ano com 360 dias. Quando não falar em outros tipos de juros, usa-se este.
JUROS BANCÁRIOS: misto de dos dois. Prazo pelo ano civil e taxa pelo ano comercial.

Montante ou Capital Acumulado

É o valor resgatado ao final da aplicação do capital C, isto é, a soma do capital inicial aplicado mais os devidos juros.

$$\boxed{M = C+J} \quad \boxed{M = C.(1+in)}$$

n = prazo,

J = juros,

C = capital,

i = taxa,

(1 – in) = fator de acumulação de capitalização de juros simples.

Exemplo:

Vamos supor alguém deposite R$ 500,00 na Caderneta de Poupança no primeiro dia útil do ano, só para facilitar tudo.

02/01/2006 -> R$ 500,00.

Quando chegar no dia 02/02/2006, há a contagem do juro:

j = 0,5 x 500,00 / 100 = R$ 2,50.

Então, a Caixa Econômica Federal deposita os R$ 2,50 na conta do depositante como aluguel do dinheiro. Esta conta-poupança fica, então, com o valor de R$ 502,50.

Este valor, por convenção (combinação entre as pessoas) passa a se chamar Montante.

Montante é o que havia antes do juros, mais os juros.

Mas aí, nosso depositante, que é uma pessoa muito influenciável, ouve falar que um outro banco paga uma taxa melhor na Caderneta de Poupança, sem saber que o sistema é unificado e as Cadernetas de Poupança obedecem sempre à regra da Caixa Econômica Federal, e saca totalmente o valor do montante. E leva para outro banco o valor total de R$ 502,50, abrindo uma nova conta.

Então, neste novo banco, ele deposita, no mesmo dia 2/2 o seu dinheiro para uma nova aplicação.

02/02/2006 -> R$ 502,50.

No dia 02/03/2006, um mês após, o novo banco paga-lhe a taxa padrão, isto é,

j = 0,5 x 502,50 / 100 = R$ 2,5125.

Como não temos representação além da dos centavos, o banco deposita R$ 2,51 em sua conta, agora somando os R$ 502,50 iniciais com os novos juros, isto é, indo o Montante para R$ 505,01.

Não satisfeito com o juro pago, ele retira o dinheiro deste banco e vai a outra Caderneta de Poupança com a mesma ilusão de ganhar mais do que antes e abre uma nova conta.

02/03/2006 -> R$ 505,01.

No dia 02/04/2006 ele vai ao banco e encontra o juro de

j = 0,5 x 505,01 / 100 = R$ 2,52, perfazendo o montante de R$ 507,53.

Nosso amigo então percebe que perdeu tempo, teve trabalho de abrir contas desnecessariamente. Se ele tivesse deixado o dinheiro no primeiro banco, o valor seria o mesmo, pois as regras de cálculos são as mesmas e foram aplicadas sempre sobre o valor que teriam caso ficassem numa mesma instituição bancária.

Agora vamos ver o que aconteceria, caso nosso ambicioso depositante deixasse seu dinheiro na primeira conta, sem abrir todas aquelas outras.

500,00.

1o. Juro -> 0,5 x 500,00 / 100 = 2,50.

500,00 + 2,50 = 502,50.

2o. Juro -> 0,5 x 502,50 / 100 = 2,51.

502,50 + 2,51 = R$ 505,01

3o. Juro -> 0,5 x 505,01 / 100 = 2,52.

505,01 + 2,52 = 507,53.

Para prosseguir, relembremos que Montante (M) é igual ao Capital (C) acrescido dos juros (j) no fim do período.

$$\mathbf{M = C + j}$$

$$M = C + r \times C / 100$$

Para facilitar, vamos dizer que não seja C o numerador daquela fraça, mas 'r'. Reescrevamos e não mudemos nada

$$\mathbf{M = C + r / 100 \times C}$$

Para facilitar a visualização, uma vez que a divisão é por uma constante, que tal escondê-la, sem deixar de considerá-la?

Vamos trocar a alíquota 'r' por 'i', significando r/100.

$$M = C + i \times C$$

ou

$$M = C + Ci$$

ou

$$M = C (1 + i) \rightarrow (1)$$

Então, se formos calcular o montante de R$ 500,00 aplicados por 1 mês, à taxa de 0,5% a.m., faríamos assim

r = 0,5; i=0,005

M = 500 (1 + 0,005) ou

M = 500 (1,005).

Aquele '1' do '1 + 0,005' representa o valor aplicado anterior.

Veja que realmente esta última fórmula dá o primeiro valor calculado ao fim do primeiro mês.

R$ 502,50.

Voltemos a (1)

$$\mathbf{M = C (1 + i)}$$

Isto daria o primeiro montante.

Mas, lembra?, o primeiro montante é o 'capital' da segunda aplicação:

M2 = 'M' vezes a partícula que afeta o valor aplicado.

Releia:

$$M2 = \{ C (1 + i) \} \times (1 + i)$$

Veja, (1 + i) está sendo multiplicado por si mesmo, ou seja

$$M2 = C (1 + i) ^ 2.$$

Continuando,

M3 = 'M2' vezes a partícula que afeta o valor aplicado.

Reescrevendo M3,

$$M3 = \{ C (1 + i) ^2 \} \times (1 + i)$$

que você pode simplificar para

$$M3 = C (1 + i) ^ 3.$$

Se formos ver a aplicação inicial de R$ 500,00 no início de nossa história, teremos que

M3 = 500,00 x (1 + 0,005) ^ 3

que resulta R$ 507,53.

Você viu que, na nossa história de alguém depositar um valor inicial e retirar após o primeiro período esse valor mais seus juros, abrir uma nova conta com o montante arrecadado e fazer uma nova aplicação para repetir isto mais à frente, resultou em cálculos isolados de juros simples.

Por fim, juros compostos tratam de montantes (valor mais aluguel do valor). Ou sejam, juros simples reaplicados a cada período.

Juros Compostos

Da capitalização simples, sabemos que o rendimento se dá de forma linear ou proporcional. A base de cálculo é sempre o capital inicial. No regime composto de capitalização, dizemos que o rendimento se dá de forma *exponencial*. Os juros do período são calculados com base num capital, formando um montante, que será a nova base de cálculo para o período seguinte.

Chama-se período de capitalização o instante de tempo o qual a aplicação rende juros.

Sendo o tempo de aplicação igual a 2 anos, por exemplo, e os juros capitalizados mensalmente, teremos 24 períodos de capitalização; para uma capitalização bimestral, a quantidade de períodos será igual a 12; se a capitalização for semestral, será 4 , e assim sucessivamente.

EXEMPLO: Na aplicação de R$ 1.000,00 durante 5 meses, à taxa de 2% a.m., temos, contada uma capitalização mensal, 5 períodos de capitalização, ou seja, a aplicação inicial vai render 5 vezes.

Observando o crescimento do capital a cada período de capitalização, temos:

1º período:

100% R$ 1.000

102% ⇒ M = R$ 1.020,00 (esta é a nova base de cálculo para o período seguinte)

	CAPITAL	MONTANTE
2º período:	R$ 1.020,00 · 1,02	= R$ 1.040,40
3º período:	R$ 1.040,40 · 1,02	= R$ 1.061,21
4º período:	R$ 1.061,21 · 1,02	= R$ 1.082,43
5º período:	R$ 1.082,43 · 1,02	= R$ 1.104,08

Portanto, o montante ao final dos 5 meses será R$ 1.104,08.

No cálculo, tivemos

R$ 1.000 · 1,02 · 1,02 · 1,02 · 1,02 · 1,02

= R$ 1.000 · $(1{,}02)^5$

= R$ 1.000 · 1,10408

= R$ 1.104,08

Observamos o fator $(1{,}02)^5$. Essa potência pode ser calculada com calculadoras científicas ou com auxílio das tabelas financeiras.

Generalizando, o cálculo do montante a juros compostos será dado pela expressão abaixo, na qual *M* é o montante, *C* o capital, *i* é a taxa de juros e *n* é a quantidade de capitalizações.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Comparando o cálculo composto (exponencial) com o cálculo simples (linear), vemos no cálculo simples:

CAPITAL	JUROS	MONTANTE
R$ 1.000,00 · 0,02	= R$ 20,00	⇒ M = R$ 1.020,00
R$ 1.000,00 · 0,02	= R$ 20,00	⇒ M = R$ 1.040,00
R$ 1.000,00 · 0,02	= R$ 20,00	⇒ M = R$ 1.060,00
R$ 1.000,00 · 0,02	= R$ 20,00	⇒ M = R$ 1.080,00
R$ 1.000,00 · 0,02	= R$ 20,00	⇒ M = R$ 1.100,00

Portanto, o montante simples, ao final dos 5 meses será R$ 1.100,00.

Observamos que ao final do primeiro período de capitalização, os juros compostos e os juros simples, apresentam valores iguais. A partir daí, o rendimento composto passa a superar o simples.

Exemplos Resolvidos

1) Calcular o montante, ao final de um ano de aplicação, do capital R$ 600,00, à taxa composta de 4% ao mês.

Resolução:

A capitalização é mensal, portanto, no tempo de aplicação considerado teremos 12 capitalizações.

C = R$ 600

i = 4% = 0,04

n = 12

$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow M = 600 \cdot (1 + 0{,}04)^{12} \Rightarrow M = 600 \cdot (1{,}04)^{12}$

$\Rightarrow M = 600 \cdot 1{,}60103$

M = R$ 960,62

O fator $(1{,}04)^{12}$ pode ser calculado com auxílio das tabelas financeiras, para n = 12 e i = 4%.

(1 + i)ⁿ				
n i ⇒ ⇓	2%	3%	*4%*	5%
9	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133
10	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889
11	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034
12	1,26824	1,42576	*1,60103*	1,79586
13	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565

2) O capital R$ 500,00 foi aplicado durante 8 meses à taxa de 5% ao mês. Qual o valor dos juros compostos produzidos?

Resolução:

C = R$ 500

i = 5% = 0,05

n = 8 (as capitalizações são mensais)

$M = C.(1 + i)^n \Rightarrow M = 500 \cdot (1{,}05)^8 \Rightarrow M = R\$\ 738{,}73$

O valor dos juros será:

J = 738,73 – 500

J = R$ 238,73

3) Qual a aplicação inicial que, empregada por 1 ano e seis meses, à taxa de juros compostos de 3% ao trimestre, se torna igual a R$ 477,62?

Resolução:

M = R$ 477,62

i = 3% = 0,03

n = 6 (as capitalizações são trimestrais)

$M = C \cdot (1 + i)^n$

$477{,}62 = C \cdot (1{,}03)^6$

$C = \dfrac{477{,}62}{1{,}19405}$

C = R$ 400,00

Diferença entre Juros Simples e Juros Compostos

Através de um exemplo, mostraremos a diferença entre os dois regimes: temos um capital de R$ 2.000,00 aplicado à taxa de 20% a.a. por um período de 4 anos a **juros simples** e **juros compostos**.

Temos:

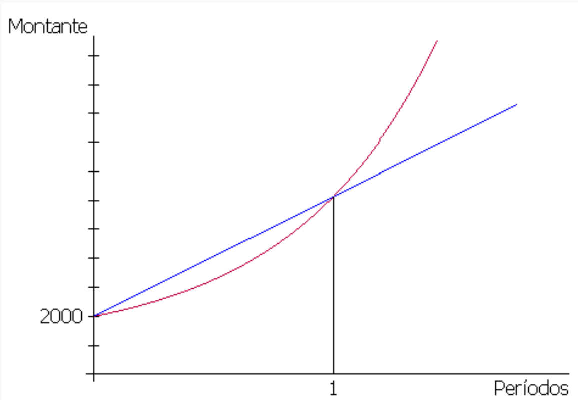
c = R$ 2.000,00

i = 20%

n = 4 anos

n	Juros Simples		Juros Compostos	
	Juro por período	Montante	Juro por período	Montante
1	2.000 x 0,2 = 400	2.400	2.000 x 0,2 = 400	2.400
2	2.000 x 0,2 = 400	2.800	2.400 x 0,2 = 480	2.880
3	2.000 x 0,2 = 400	3.200	2.880 x 0,2 = 576	3.456
4	2.000 x 0,2 = 400	3.600	3.456 x 0,2 = 691,20	4.147,20

O gráfico abaixo permite uma melhor visualização entre os montantes de juros simples e juros compostos. A visualização nos permite identificar que o regime de juros simples é **linear** enquanto o de juros compostos é **exponencial**.



A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.

2. **Taxa de Juros:** o juro é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo** e **risco**, que a operação envolver. O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como **taxa de juros**.

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, em seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8% a.a. - (a.a. significa ao ano).

10% a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual à taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).

0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre).

OBSERVAÇÃO:

A taxa de juros sempre se refere a uma mesma unidade de tempo (dia, mês, ano, etc.) e pode ser apresentada na forma percentual ou unitária.

Exemplos Resolvidos

1) Um título de R$ 1.000,00 é descontado 3 meses antes do vencimento, à taxa racional composta de 10% ao mês. Qual o valor atual?

Resolução:

N = R$ 1.000
n = 3
i = 10% = 0,1

Substituindo os dados do problema em

$A = \frac{N}{(1+i)^n}$ ou $A = N \cdot (1 + i)^{-n}$, temos:

$A = N \cdot (1 + i)^{-n}$
$A = N \cdot (1,1)^{-3}$
$A = 1.000 \cdot 0,75131$
A = R$ 751,31

2) Resgata-se um título por R$ 1.645,41, com 4 meses de antecedência. Qual o valor nominal do título, sendo a taxa de 60% ao ano com capitalização mensal, e o critério do desconto racional composto?

Resolução:

A = R$ 1.645,41
n = 4
i = 5% = 0,05

Substituindo os dados em $A = \frac{N}{(1+i)^n}$, temos:

$$A = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$1.645,41 = \frac{N}{(1,05)^4}$$

$$1.645,41 = \frac{N}{1,21551}$$

N = R$ 2.000,00

ESTUDO DIRIGIDO

01) Se uma dívida, contraída a juros compostos e a uma taxa fixa, aumentou 125% em 2 anos, a taxa anual de juros cobrada foi de

(A) 25%

(B) 27,5%

(C) 45%

(D) 47,5%

(E) 50%

02) O extrato de uma aplicação financeira capitalizada anualmente no sistema de juros compostos é dado na tabela abaixo.

Data	Saldo (R$)
01/01/2008	20.000,00
01/01/2009	?????
01/01/2010	28.800,00

No período considerado, não houve depósitos nem retiradas. Se as taxas de juros referentes aos períodos de 01/01/2008 a 01/01/2009 e de 01/01/2009 a 01/01/2010 foram iguais, então o saldo da aplicação, em reais, em 01/01/2009 era de

(A) 25.000,00.

(B) 24.800,00.

(C) 24.400,00.

(D) 24.200,00.

(E) 24.000,00.

03) A fórmula do montante de uma aplicação financeira efetuada à taxa de juros composta é:

Dados:

M = montante

C = capital inicial

i = taxa de juros mensal unitária

n = número de meses da aplicação

A) $M = C\ (1=i^n)$

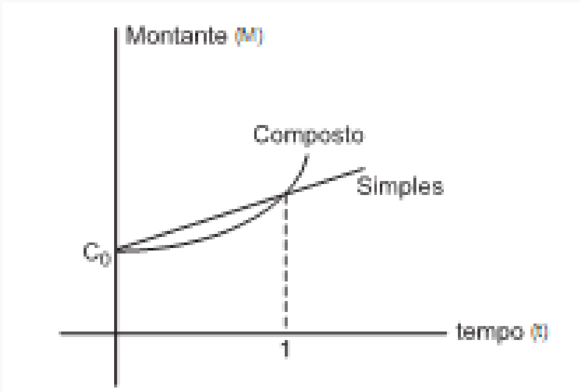
B) $M = C(1+i)^n$

C) $M = C(1+i^n)$

D) $M = C(1+i)^n$

E) $M = (Ci)^n$

04) O gráfico a seguir representa as evoluções no tempo do Montante a Juros Simples e do Montante a Juros Compostos, ambos à mesma taxa de juros. M é dado em unidades monetárias e t, na mesma unidade de tempo a que se refere a taxa de juros utilizada.



Analisando-se o gráfico, conclui-se que para o credor é mais vantajoso emprestar a juros

A) compostos, sempre.

B) compostos, se o período do empréstimo for menor do que a unidade de tempo.

C) simples, sempre.

D) simples, se o período do empréstimo for maior do que a unidade de tempo.

E) simples, se o período do empréstimo for menor do que a unidade de tempo.

05) Um capital foi aplicado, a juros simples, durante um período de 20 meses. Sabendo-se que o valor do montante no final do período foi igual a 5/4 do valor do capital inicial, tem-se que a taxa de juros anual correspondente foi de

A) 15%

B) 18%

C) 20%

D) 24%

E) 27%

06) O capital que quadruplica em 2 meses, ao se utilizar de capitalização composta, deve estar vinculado a uma taxa mensal de

A) 50%.

B) 100%.

C) 150%.

D) 200%.

E) 400%.

07) Um capital de R$ 4.000,00, aplicado à taxa de 2% ao mês, durante três meses, na capitalização composta, gera um montante de:

A) R$ 6.000,00

B) R$ 4.240,00

C) R$ 5.500,00

D) R$ 4.244,83

E) R$ 6.240,00

08) Um capital foi aplicado a juros simples, à taxa anual de 36%. Para que seja possível resgatar-se o quádruplo da quantia aplicada, esse capital deverá ficar aplicado por um período mínimo de:

A) 7 anos, 6 meses e 8 dias.

B) 8 anos e 4 meses.

C) 8 anos, 10 meses e 3 dias.

D) 11 anos e 8 meses.

E) 11 anos, 1 mês e 10 dias.

09) Uma aplicação de R$ 10.000,00 pelo prazo de 3 meses, a uma taxa de juros compostos de 3,5% ao mês, vai gerar, em reais, um montante de

A) 11.087,18

B) 11.105,00

C) 11.178,71

D) 11.189,23

E) 11.500,00

10) Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado à taxa de 3% ao mês durante 3 meses. Os montantes correspondentes obtidos segundo capitalização simples e composta, respectivamente, valem

(A) R$ 2.180,00 e R$ 2.185,45.

(B) R$ 2.180,00 e R$ 2.480,00.

(C) R$ 2.185,45 e R$ 2.485,45.

(D) R$ 2.785,45 e R$ 2.480,00.

(E) R$ 6.180.00 e R$ 4.394.00.

GABARITO

01	E	02	E	03	D	04	E	05	A
06	B	07	D	08	B	09	A	10	A

Porcentagem

Porcentagem é uma fração cujo denominador é 100, seu símbolo é (%). Sua utilização está tão disseminada que a encontramos nos meios de comunicação, nas estatísticas, em máquinas de calcular, etc. A utilização da porcentagem se faz por regra de 3 simples.

Por exemplo, a vendedora de uma loja ganha 3% de comissão sobre as vendas que faz. Se as vendas do mês de outubro forem de R$ 3.500,00 qual será sua comissão?

Equacionando e montando a regra de 3 temos:

$$\begin{array}{ccc} 3500 & \longrightarrow & 100\% \\ x & \longrightarrow & 3\% \end{array}$$

Na regra de 3, quando as grandezas são diretamente proporcionais (no caso, quanto maior a venda, maior a comissão) usamos setas paralelas e multiplicamos os termos em cruz, como se vê abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 3500 & \longrightarrow & 100\% \\ x & \longrightarrow & 3\% \end{array}$$

Ora, se 100 x = 3500 3, então

$$X = \frac{3 \times 3.500}{100} = 105$$

Logo, a comissão será de R$ 105,00.

Existe outra maneira de encarar a porcentagem, que seria usar diretamente a definição:

3% = $\frac{3}{100}$ logo 3% de R$ 3.500,00 seriam $\frac{3}{100}$ x R$ 3.500,00 = R$ 105,00.

Em conversa com um amigo, ele me diz: **O meu aluguel subiu R$ 200,00.**

Para avaliarmos se o aumento foi grande ou pequeno, é preciso compararmos o acréscimo com o valor anterior do aluguel. Isto pode ser feito analisando o quociente entre os dois valores.

Assim, se o valor do aluguel era R$ 1.000,00 esta razão é $\frac{20}{100}$, que costumeiramente analisamos deixando o denominador da fração igual a 100. Desta forma:

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Interpretamos a razão $\frac{p}{100}$ dizendo que se o aluguel fosse R$ 100,00, o aumento teria sido de R$ 20,00.

Forma decimal

É comum representarmos uma **porcentagem** na forma decimal, por exemplo, 75% na forma decimal seria representado por 0,75.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Cálculo de uma porcentagem

Para calcularmos uma **porcentagem** *p%* de V, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por V.

$$p\% \text{ de } V = \frac{p}{100} \times V$$

Assim temos:

1. 4% de 32 = 0,04 . 32 = 1,28
2. 15% de 180 = 0,15 . 180 = 27
3. 18% de 150 = 0,18 . 150 = 27
4. 35% de 126 = 0,35 . 126 = 44,1
5. 100% de 715 = 1,00 . 715 = 715
6. 115% de 60 = 1,15 . 60 = 69
7. 200% de 48 = 2,00 . 48 = 96

Todo o cálculo de porcentagem, como informado, é baseado no número 100.

O cálculo de tantos por cento de uma expressão matemática ou de um problema a ser resolvido é indicado pelo símbolo (%), e pode ser feito, na soma, por meio de uma proporção simples.

Para que se possam fazer cálculos com porcentagem (%), temos que fixar o seguinte: A taxa está para porcentagem (acréscimo, desconto, etc), assim como o valor 100 está para a quantia a ser encontrada.

Exemplo:

1) Efetue o cálculo 10% de 50

100% ____ 50

10% ____ X

100X = 500

X= 5

2) Efetua-se o resgate de um cheque pré-datado no valor de R$ 150,00 e obtém-se um desconto de 20%

100% ____ R$ 150,00

20% ____ X

X = R$ 30,00

Obs.: *O cálculo de porcentagem pode ser feito da maneira apresentada anteriormente, ou poderá ser executada como uma multiplicação de fração, como no exemplo abaixo.*

Nesse caso, lembre-se que multiplica-se sempre numerador com numerador e denominador com denominador.

10% = 10/100

34% = 34/100

3) Um jogador de basquete, ao longo do campeonato, fez 250 pontos, deste total 10% foram de cestas de 02 pontos. Quantas cestas de 02 pontos o jogador fez do total de 250 pontos.

10% de 250 = $\frac{10}{100}$. 250 = $\frac{2500}{100}$ = 25

Portanto, do total de 250 pontos o jogador fez 25 pontos de 02 pontos.

Razão Centesimal

Chamamos de razão centesimal a toda razão cujo conseqüente (denominador) seja igual a 100.

Exemplos:

$$\frac{6}{100};\quad \frac{43}{100};\quad \frac{5,2}{100};\quad \frac{270}{100}$$

Outros nomes usados para uma razão centesimal são **razão porcentual e percentil.**

Taxa porcentual

Quando substituímos o conseqüente 100 pelo símbolo % (lê-se "por cento") temos uma **taxa porcentual** ou **taxa centesimal.**

Exemplos:

$$\frac{72}{100} = 72\% \text{ (setenta e dois por cento)}$$

$$\frac{9}{100} = 9\% \text{ (nove por cento)}$$

Exercícios Resolvidos

01) O valor de $(10\%)^2$ é:
a) 100%
b) 20%
c) 5%
d) 1%
e) 0,1%

Resolução:

$$(10)^2 = \frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100} = \frac{1\cancel{00}}{10\,0\cancel{00}} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Resposta: D

02) Como se sabe, os *icebergs* são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um *iceberg* corresponda a 8/9 do seu volume total e que o volume da parte não submersa é de 135.000 m^3.

a) Calcule o volume total do *iceberg*.

b) Calcule o volume de gelo puro do iceberg supondo que 2% de seu volume total é constituído de "impurezas", como matéria orgânica, ar e minerais.

Resolução

V = volume total do iceberg

$$V - \frac{8}{9}V = 135\,000 \Rightarrow \frac{1}{9}V = 135\,000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = 9\cdot 135\,000 \Rightarrow V = 1\,215\,000\ m^3$$

b) $V_{impurezas} = 2\%$ *de* $V = 0,02 \cdot 1\,215\,000 = 24\,300\ m^3$

$V_{gelo\ puro} = V - Vimpurezas = 1\,215\,000 - 24\,300 = 1\,190\,700\ m^3$

03) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?
a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 36%

Solução:

Seja $PC =$ Preço de Custo

Preço de Tabela = $1,80\cdot PC$ .... note que 1,80 é o **fator de aumento** $\rightarrow (1+\frac{80}{100})$

Preço com Lucro Zero = $1,44\cdot PC$ ..... aumentamos PC de 44%.

O maior desconto que se pode conceder ao **preço de tabela** ($1,80\cdot PC$) deve diminuir este preço de tal forma que se iguale ao **preço com lucro zero** ($1,44\cdot PC$) . Daí,

$$(1-\frac{X}{100})\cdot 1,80\cdot PC = 1,44\cdot PC \quad \rightarrow$$

$$(1-\frac{X}{100})\cdot 1,80 = 1,44 \quad \rightarrow$$

$$(1-\frac{X}{100})=0{,}20$$

Então:

X = 20%, onde X é o desconto máximo. Resposta: 20% - alternativa C

Razão Centesimal

Chamamos de razão centesimal a toda razão cujo conseqüente (denominador) seja igual a 100.

Exemplos:

$$\frac{6}{100};\ \frac{43}{100};\ \frac{5{,}2}{100};\ \frac{270}{100}$$

Outros nomes usados para uma razão centesimal são **razão porcentual e percentil.**

Taxa porcentual

Quando substituímos o conseqüente 100 pelo símbolo % (lê-se "por cento") temos uma **taxa porcentual** ou **taxa centesimal.**

Exemplos:

$$\frac{72}{100}=72\%\ (\text{setenta e dois por cento})$$

$$\frac{9}{100}=9\%\ (\text{nove por cento})$$

Porcentagem

Dada uma razão qualquer p/v, chamamos de **porcentagem** do valor **v** a todo valor de **p** que estabeleça uma proporção com alguma razão centesimal.

$$\boxed{\frac{p}{v}=\frac{r}{100}=r\,\%}$$

Na prática, pode-se determinar o valor **p** da porcentagem de dois modos:

1° modo: Multiplicando-se a razão centesimal pelo valor **v**.

$$p=\frac{r}{100}\times v$$

A expressão acima justifica dizermos que **"p é igual a r% de v".**

2° modo: Resolvendo a regra de três que compara **v** a 100%:

valores		taxas
p	______	r%
v	______	100%

Atenção:

Nas questões de concursos públicos é comum encontrarmos:

- "**porcentagem**" no lugar de "**taxa percentual**". Exemplo: "a porcentagem foi de 20%";
- **desconto, abatimento, lucro, prejuízo,** etc. indicando uma **porcentagem** em situações específicas;
- a expressão "**principal**" indicando o valor de **referência** (v) que corresponde a 100%.

Observe que resolver uma porcentagem ou uma taxa percentual é, fundamentalmente, resolver uma proporção ou uma regra de três simples.

Exercícios Resolvidos

1. A conta de um restaurante indicava uma despesa de R$ 26,00 e trazia a seguinte observação: "Não incluímos os 10% de serviço". Quanto representam, em dinheiro, os 10% de serviço e quanto fica o total da despesa se nela incluirmos a porcentagem referente ao serviço?

Solução:

$$10\% \text{ de } 26{,}00 = \frac{10}{100} \times 26 = \frac{260}{100} = 2{,}60$$

Portanto, os 10% de serviço representam R$ 2,60.

Incluindo esta porcentagem na despesa original, teremos:

26,00 + 2,60 = 28,60

Assim, o total da despesa passa a ser de R$ 28,60.

2. Num laboratório, 32% das cobaias são brancas e as outras 204 são cinzas. Quantas cobaias há neste laboratório?

Solução:

O total de cobaias corresponde a 100%:

brancas (32%) + cinzas (x%) = total (100%)

x% = 100% - 32% = 68%

Então, as 204 cobaias cinzas são 68% do total.

Chamando o total de cobaias de C, poderemos

ESTUDO DIRIGIDO

01) Se o comprimento do raio de um círculo é aumentado em 30% de seu valor, então a sua área aumenta em

A) 60%

B) 69%

C) 80%

D) 35%

E) 43%

02) Na sala de aula de Maria Eduarda, 60% dos alunos são meninos. Passado o 1º mês de aula, 10 alunos mudaram de sala. Depois da saída dos 10 meninos, a sala ficou com um número de meninos igual ao número de meninas. Qual era o total de estudantes (meninos e meninas) da sala de Maria Eduarda no início das aulas?

A) 50

B) 40

C) 55

D) 45

D) 48

03) Um artigo é vendido em uma loja por R$ 125,00. Sobre esse preço, são dados dois abatimentos sucessivos: um de 16%, e outro de p%. Se o preço de tal artigo reduziu-se a R$ 81,90, então p é igual a:

A) 18

B) 22

C) 20

D) 24

E) 26

04) No concurso para professores da Prefeitura de Surubim, do total de inscritos, 60% são homens. Entre os homens inscritos, 30% estão empregados e, entre as mulheres, 40% já têm emprego. É CORRETO afirmar que o percentual de inscritos sem emprego é

A) 34%.

B) 48%.

D) 66%.

C) 55%.

E) 71%.

05) Um recipiente contém 600 litros de uma mistura de álcool e gasolina. Sabendo-se que a mistura contém 12% de álcool, quantos litros de álcool devemos adicionar à mistura, para que a nova mistura contenha 20% de álcool?

A) 50

B) 60

D) 20

C) 40

E) 70

GABARITO:

01	B	04	D
02	A	05	B
03	B	06	

GEOMETRIA PLANA

Polígono

A palavra Polígono é oriunda do grego e significa: Polígono = Poli (muitos) + gono (ângulos). Matematicamente denominamos polígonos como sendo uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada. Linha poligonal é uma linha que é formada apenas por segmentos de reta. Os polígonos precisam ser figuras fechadas. O número de lados de um polígono coincide com o número de ângulos.

Observe:

Os polígonos classificam-se em função do número de lados. Abaixo estão os principais polígonos:

Nome	Polígono	Nº de lados
Triângulo		3
Quadrilátero		4
Pentágono		5
Hexágono		6
Heptágono		7
Octógono		8
Decágono		10

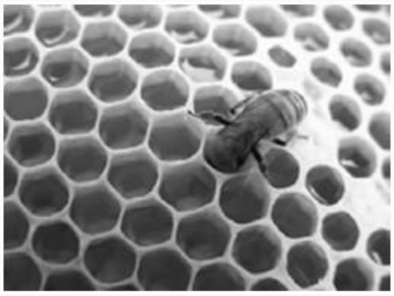
Alguns polígonos possuem nomes bem particulares, veja a seguir:

- um polígono com 9 ângulos → eneágono
- um polígono com 11 ângulos → undecágono
- um polígono com 15 ângulos → pentadecágono
- um polígono com 20 ângulos → icoságono

Os polígonos possuem os seguintes elementos: vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e diagonais. Dos elementos citados vamos dar ênfase no significado de diagonais e como calcular o número de diagonais de um polígono qualquer.

Polígonos no dia-a-dia e na natureza

É comum o uso de polígonos regulares no cotidiano. As abelhas utilizam-se do hexágono regular nas colméias.



Nas bolas de futebol também aparecem figuras baseadas em polígonos regulares (pentágonos e hexágonos regulares).

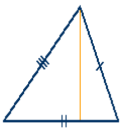
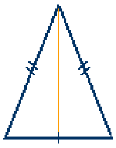
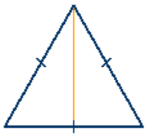
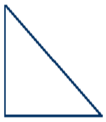
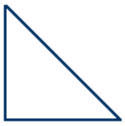
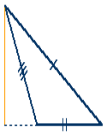
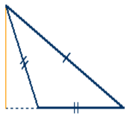
Na engenharia, algumas formações poligonais são utilizadas. Por exemplo, na ponte Hercílio Luz (SC) pode-se ver a formação de triângulos e quadriláteros, formados pelas barras de aço que ligam as torres.

Na Calçada dos Gigantes – formação geológica de basalto, localizada no litoral nordeste da Irlanda – torres de rochas prismáticas foram erguidas no passado por atividades vulcânicas.

Referências Bibliográficas:
ANDRINI, Álvaro. VASCONCELOS, Maria José. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

Triângulos

Triângulos são figuras geométricas limitadas por três retas, que se encontram duas a duas. Podem ser classificados quanto aos seus lados e quanto aos ângulos:

<table>
<tr><td>Comprimento dos seus lados</td><td>três lados com comprimentos diferentes</td><td colspan="2">Tem pelo menos dois lados com o mesmo comprimento- Isósceles</td></tr>
<tr><td>a amplitude dos seus ângulos</td><td>Escaleno</td><td>Isósceles</td><td>Equilátero</td></tr>
<tr><td>Acutângulo (Todos os ângulos são agudos)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Retângulo (Tem um ângulo recto)</td><td></td><td></td><td rowspan="2">Altura de um triângulo é o segmento de reta que se obtém baixando de um vértice a perpendicular ao lado oposto</td></tr>
<tr><td>Obtusângulo (Tem um ângulo obtuso)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

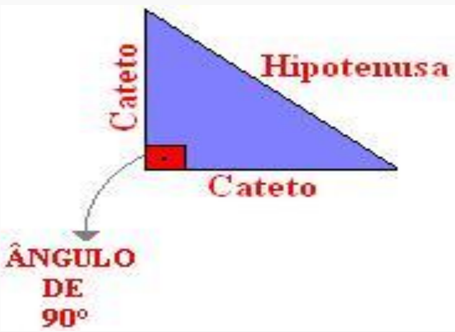
OBSERVAÇÃO:

Ressalte-se que ângulos agudos são aqueles cujas medidas são inferiores à 90º; ângulos retos são aqueles em que suas medidas são exatos 90º e ângulos obtusos são superiores à 90º.

TEOREMA DE PITÁGORAS

No caso do triângulo retângulo, temos uma particularidade, conhecida como teorema de Pitágoras.

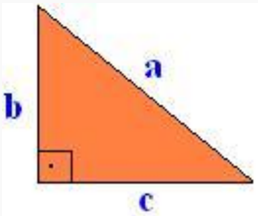
Este utiliza da seguinte nomenclatura:



onde, hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, ou seja, sempre o lado oposto ao ângulo de 90º. E assim, segue o teorema de Pitágoras que diz:

A soma do quadrado dos catetos se iguala ao quadrado da hipotenusa,

o que é, na prática, a seguinte situação:

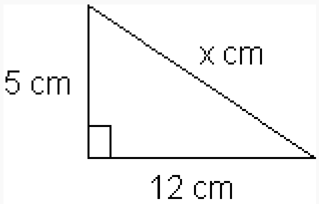


$a^2 = b^2 + c^2$

Exemplo:

Calcula o valor de x em cada um dos triângulos retângulos:

a)



$x^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 144 + 25 \Leftrightarrow$

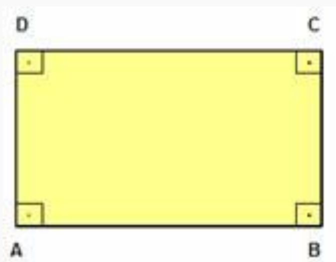
$\Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{169} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 13$

Quadriláteros

O **retângulo** é o paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (os quatro ângulos são retos).

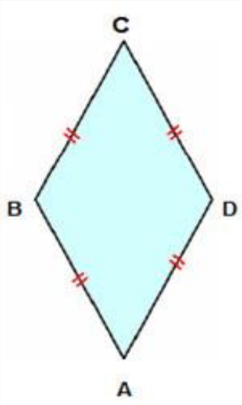


Relações:

1) AB = CD e AD = BC

2) As diagonais AC e BD são iguais.

O **losango** é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes. Seus ângulos opostos são congruentes sendo dois agudos e dois obtusos.



Relações:

1) AB = BC = CD = DA

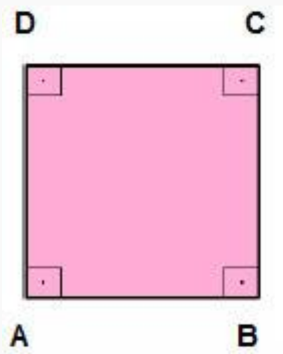
2) A diagonal AC é maior que a diagonal BD.

3) As diagonais são perpendiculares.

3) ^A = ^C e ^B = ^D

4) ^A + ^B = 180º

O **quadrado** é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes e também os quatro ângulos congruentes (retos).



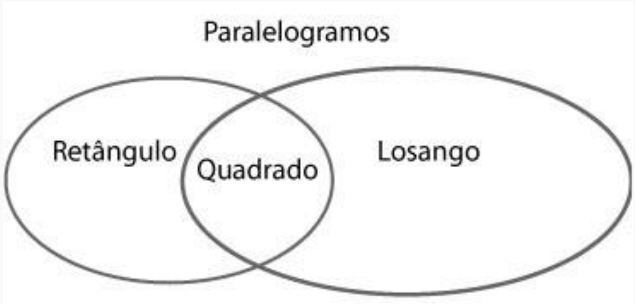
Relações:

1) AB = BC = CD = DA

2) A diagonal AC é igual a diagonal BD.

3) As diagonais são perpendiculares.

O diagrama abaixo reúne os quadriláteros do grupo dos paralelogramos.



Saiba mais sobre Paralelogramos na videos-aula da Plataforma. Após assistir, revise o que você aprendeu respondendo aos nossos desafios!

ESTUDO DIRIGIDO

1. Se um quadrilátero tem medidas iguais em todos os lados, então todos os seus ângulos internos têm medidas iguais. Para mostrar que esta proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

a) Losango

b) Trapézio

c) Retângulo

d) Quadrado

e) Paralelogramo

2. Considere as seguintes proposições:

I. Todo quadrado é um losango.

II. Todo quadrado é um retângulo.

III. Todo retângulo é um paralelogramo.

IV. Todo trapézio é um quadrilátero.

Pode-se afirmar que:

a) Só uma é verdadeira.

b) Todas são verdadeiras.

c) Só uma é falsa.

d) Duas são verdadeiras e duas são falsas.

e) Todas são falsas.

3. Complete as palavras cruzadas de acordo com as perguntas:

Horizontal

1. Quadrilátero com os lados opostos paralelos.

3. Diz-se de um triângulo que tem todos os lados iguais.

4. Quadrilátero com os ângulos internos retos.

5. Diz-se de um triângulo que tem todos os ângulos internos agudos.

7. Diz-se de um trapézio que tem dois lados iguais.

9. Quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos.

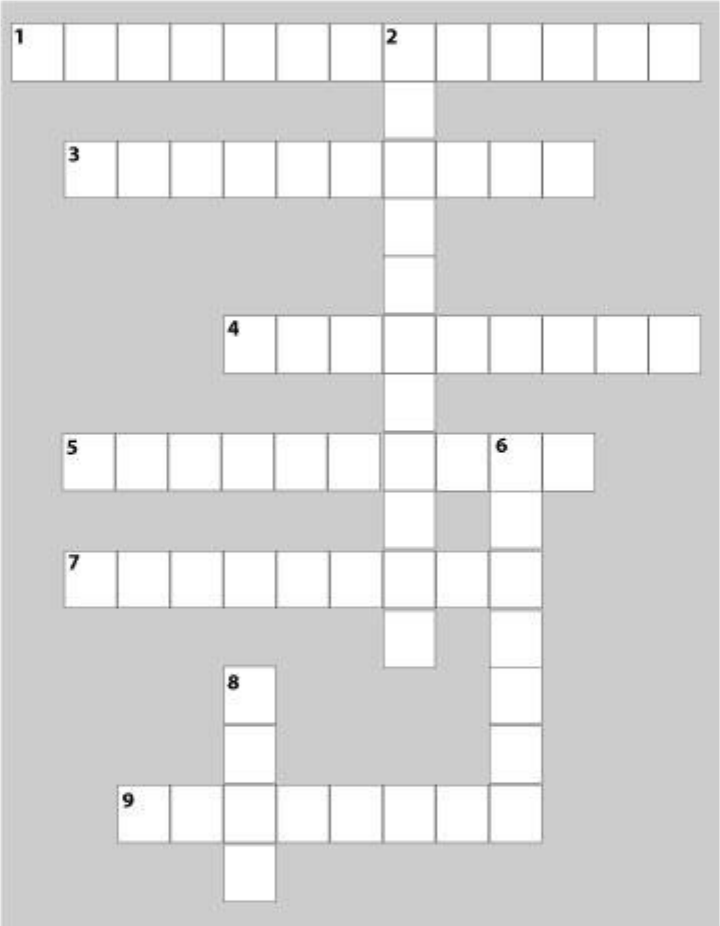
10. Diz-se de um trapézio com os lados todos diferentes.

Vertical

2. Diz-se de um triângulo que tem um ângulo interno obtuso.

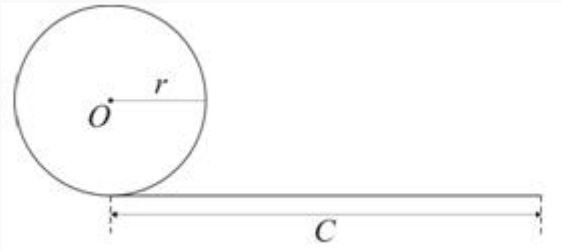
6. Quadrilátero com todos os lados iguais.

8. Paralelogramo com os lados iguais



Círculo e circunferência

A **circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano, que estão a uma mesma distância de um determinado ponto, chamado centro. Essa distância é denominada raio **r** da circunferência.

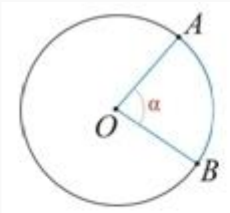


O comprimento C de uma circunferência de raio r pode ser determinado retificando-se a circunferência:

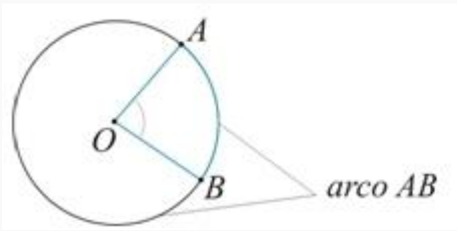
$$C = 2\pi r$$
$$\pi = 3,141592\ldots$$

Arcos e ângulos

Consideremos dois pontos, A e B, em uma circunferência de centro O. o ângulo formado pelos segmentos OB e AO, com o vértice no centro, é denominado ângulo central. AÔB = ângulo central



O ângulo central determina na circunferência dois arcos de circunferência:

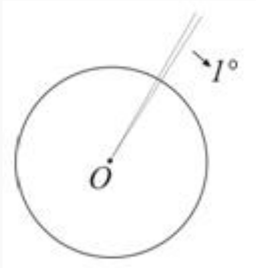


Se A e B forem coincidentes, teremos um arco nulo e outro de uma volta.

Grau e Radiano

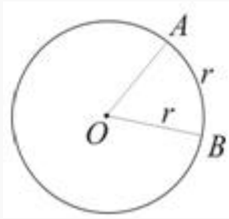
As unidades de medida de arcos são grau e radiano. Arcos de 1° é aquele cujo comprimento é igual a 1/360 do comprimento da circunferência. O arco de uma volta corresponde, portanto, a C=360°.

$$1^\circ = \frac{1}{360}$$



Arco de um radiano (1 rad), é aquele cujo comprimento é igual ao raio da circunferência em que esta contido.

$$AB = r = 1\ rad$$



Se 1 rad é a medida de um arco cujo comprimento (retificado) é igual a 1r, então 2 rad é a medida de um arco de comprimento igual a 2r, μrad é a medida de um arco de comprimento igual a μr e 2 μrad é a medida de um arco de comprimento e 2 μr. O arco de uma volta corresponde, portanto, C = 2μr.

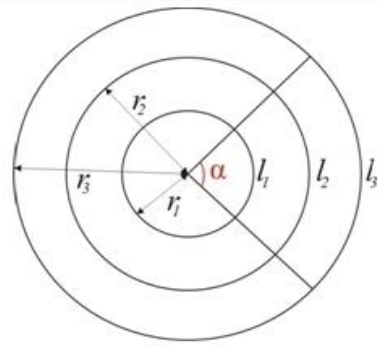
Logo:

$$C = 2\pi rad$$

Denomina-se medida de uma arco em radianos a razão entre seu comprimento e o comprimento do raio da circunferência em que está contido, ambos na mesma unidade de medida.

$$AB = \frac{comprimento\ do\ arco}{comprimento\ do\ raio}.rad$$

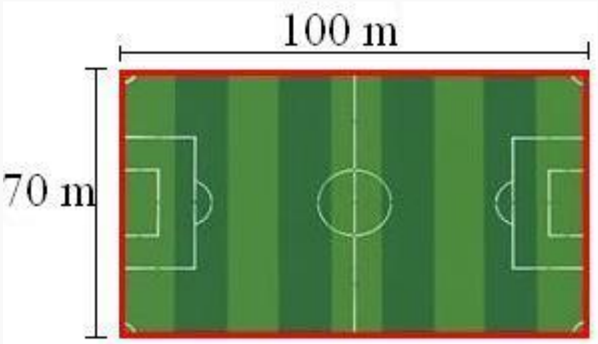
$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3}$$



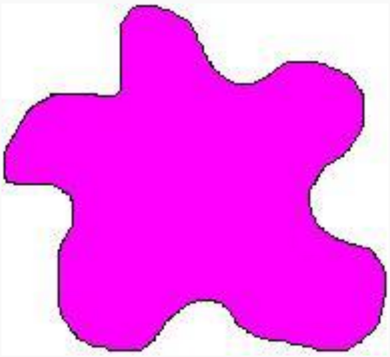
Área e Perímetro

Perímetro

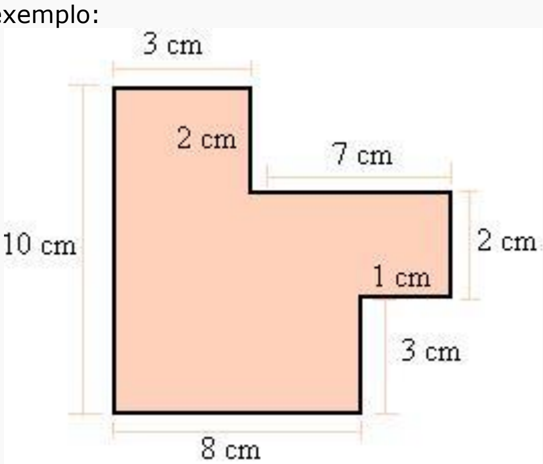
O que é perímetro? E como o calculamos? Perímetro é a medida do comprimento de um contorno. Observe um campo de futebol, o perímetro dele é o seu contorno que está de vermelho.



Pra fazermos o cálculo do perímetro devemos somar todos os seus lados:
P = 100 + 70 + 100 + 70
P = 340 m
O perímetro da figura abaixo é o contorno dela, como não temos a medida de seus lados, para medir o seu perímetro devemos contorná-la com um barbante e depois esticá-lo e calcular a medida.

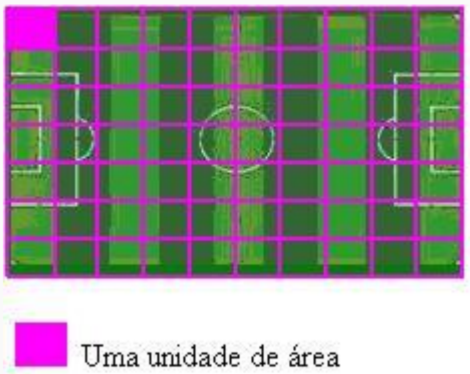


Por exemplo:

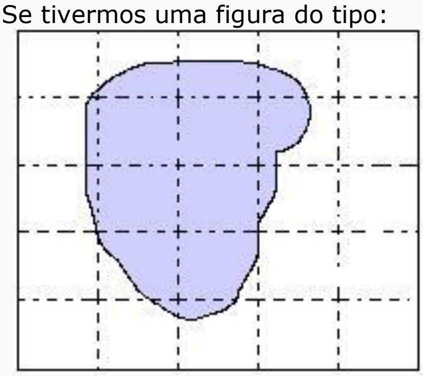


O perímetro da figura é a soma de todos os seus lados:
P = 10 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 + 2 +3
P = 18 + 4 + 9 + 5
P = 22 + 14
P = 36
A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida de comprimento: metro, centímetro, quilômetro...

Área
Área é a medida de uma superfície. A área do campo de futebol é a medida de sua superfície (gramado). Se pegarmos outro campo de futebol e colocarmos em uma malha quadriculada, a sua área será equivalente à quantidade de quadradinho. Se cada quadrado for uma unidade de área:



Veremos que a área do campo de futebol é 70 unidades de área. A unidade de medida da área é: m^2 (metros quadrados), cm^2 (centímetros quadrados), e outros. Se tivermos uma figura do tipo:



Sua área será um valor aproximado. Cada  é uma unidade, então a área aproximada dessa figura será de 4 unidades.
No estudo da matemática calculamos áreas de figuras planas e para cada figura há uma fórmula pra calcular a sua área.

GEOMETRIA ESPACIAL

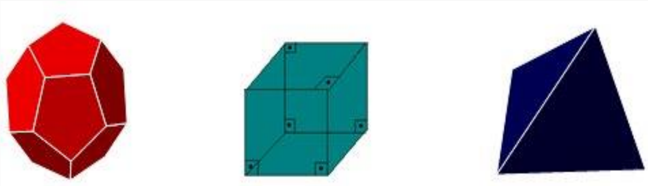
Poliedro (Prisma e pirâmede)

Afirmar que **poliedro** são sólidos formados por faces (partes limitadas de um plano), pode dar uma ideia do que eles sejam, mas não serve absolutamente como definição; aliás, uma das grandes dificuldades para o desenvolvimento desse tema, bem como fazer demonstrações dos teoremas sobre poliedros, estava justamente na falta de uma definição precisa do significado dessa palavra.

Definição

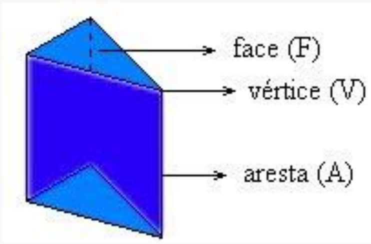
A seguinte definição nos dá uma idéia do que é poliedro, então definiremos assim: "*Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono".

Vejam os seguintes exemplos:



OBS: Podemos também encontrar como definição para poliedros, o seguinte: É um sólido limitado por polígonos, que tem, dois a dois, um lado comum.

Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas, chamadas de *faces*. Cada lado de uma região poligonal, comum a exatamente duas faces, é chamada *aresta* do poliedro. E cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro. Veja:



Poliedro convexo e Poliedro não-convexo

Observe as figuras abaixo:

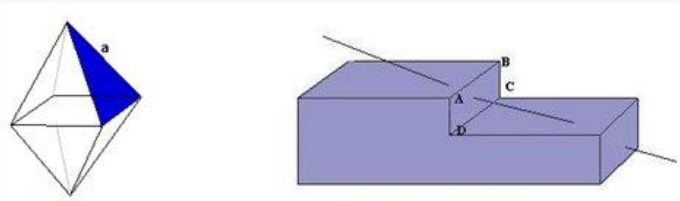


Fig. 02 Fig. 03

Qual dessas figuras você classificaria como poliedro convexo e como poliedro não convexo?

A resposta para essa indagação fica mais fácil quando temos conhecimento de que:

"Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos".

Logo, podemos concluir, que o poliedro convexo está representado pela figura 02, e a figura 03 é um exemplo de poliedro não-convexo.

Teorema de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértice (V), o número de aresta (A) e o número de faces (F) de um poliedro convexo.

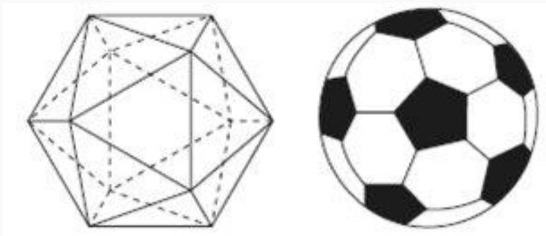
O teorema de Euler foi descoberto em 1758. Desde então diversas demonstrações apareceram na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de poliedro. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra.

Em todo poliedro com **A** arestas, **V** vértices e **F** faces, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

Exercícios Resolvidos

1) Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?



Resolução:

Como o poliedro tem 12 faces pentagonais, então:
12 . 5 = 60
O poliedro tem 20 faces hexagonais, assim 20 . 6 = 120, logo: F = 12 + 20 = 32
Cada aresta foi contada duas vezes, portanto temos:
2A = 60 + 120
A = 90
Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler, V – A + F = 2, portanto:
V – 90 + 32 = 2
V = 2 + 90 – 32
V = 60
Assim, o número de vértices é 60.

2) Determinar o número de arestas e o número de vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Resolução:

Como o poliedro tem 6 faces quadrangulares, calculamos: 6 . 4 = 24

O poliedro tem 4 faces triangulares: 4 . 3 = 12

Como cada aresta foi contada duas vezes, o número total de arestas é: A = (24+12)/2 = 18

Temos então F = 10, A = 18.

Aplicando a relação de Euler:

V – A + F = 2

V – 18 + 10 = 2

V = 10

Logo, o poliedro tem 18 arestas e 10 vértices.

ESTUDO DIRIGIDO

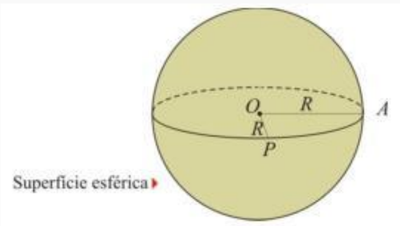
1) Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

2) (PUC –SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

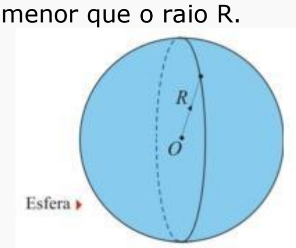
a) 4
b) 12
c) 10
d) 6

Cilindro e Esfera

Superfície esférica de centro O, é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual a R.



Esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual ou menor que o raio R.



Área da Superfície e Volume da Esfera

A área da superfície esférica de raio R é dada por:

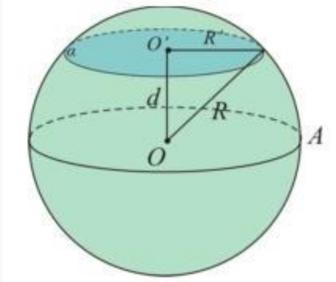
$$S_e = 4\pi R^2$$

O volume da esfera de raio R é dado por:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Secção de uma Esfera

OO' é a distância do plano α ao centro da esfera. Qualquer plano α que seciona uma esfera de raio R determina como seção plana um círculo de raio R.



Sendo OO' = d, temos:

$$R^2 = d^2 + (R')^2$$

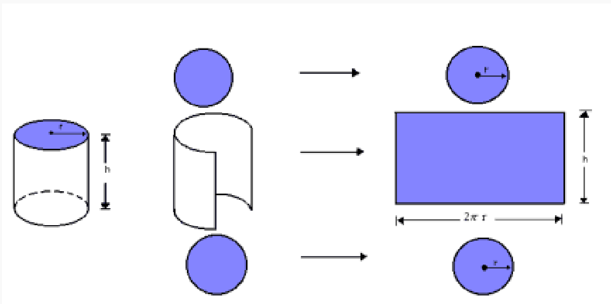
Quando o plano que secciona a esfera contiver um diâmetro, teremos d = 0. Nesse caso, o círculo determinado terá raio R e será denominado círculo máximo.

Cilindro

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

a) área lateral (**A**$_L$)

Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é **h** e cujos raios dos círculos das bases são **r** é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h:

$$\boxed{A_L = 2\pi r h}$$

b) área da base (A_B):área do círculo de raio **r**

$$\boxed{A_B = \pi r^2}$$

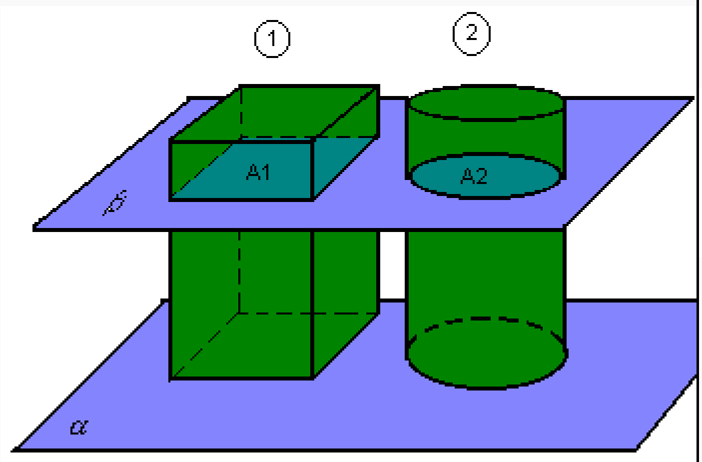
c) área total (A_T): soma da área lateral com as áreas das bases

$$\boxed{A_T = A_L + 2A_B = 2\pi\,r\,h + 2\pi\,r^2 = 2\pi\,r\,(h + r)}$$

Volume

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o princípio de Cavalieri.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo ao plano α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



$\alpha // \beta$ e $A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

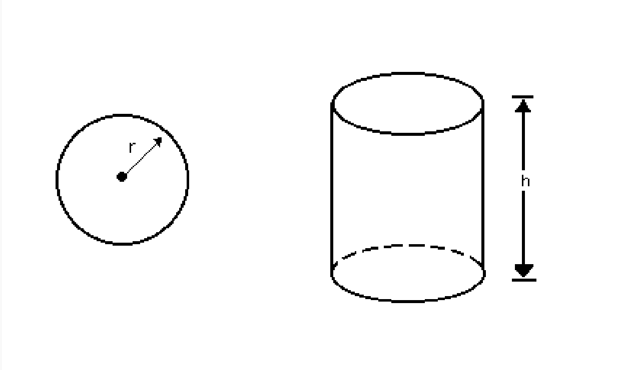
Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$$\boxed{V_{cilindro} = A_B h}$$

No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio **r** $A_B = \pi r^2$;

portanto seu volume é:



$V = \pi r^2 h$

INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS

Introdução a Geometria Analítica

1) Sistema cartesiano

☐ Ponto médio

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

→ ponto médio de um segmento de reta AB

☐ Baricentro de um triângulo

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

→ baricentro de um triângulo ABC

☐ Distâncias

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$ → distância entre os pontos AB

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ → distância reta ponto $P(x_0, y_0)$

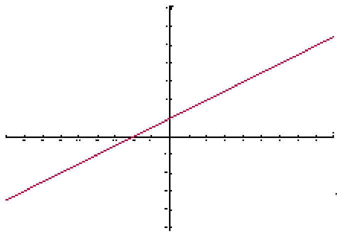
2) Reta

$y = mx + n$ → equação reduzida

$ax + by + c = 0$ → equação geral

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ → equação segmentária

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ → equação paramétrica



gráfico

$y = mx + n$ → retas

$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

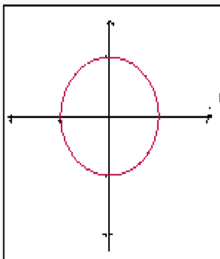
perpendiculares

☐ Condição de alinhamento

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{condição de alinhamento dos pontos A e B}$$

$$|S| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{área do triângulo ABC}$$

3) Circunferência



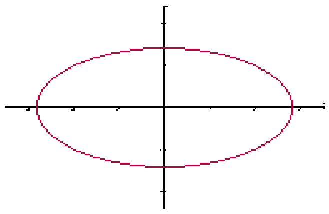
gráfico

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \rightarrow$ equação da circunferência de centro C e raio r

Posição reta circunferência → calcula-se a distância entre o centro da circunferência e a reta:
se igual a r é tangente
se > r não há pontos em comum
se < r dois pontos de intersecção

4) Cônicas

☐ Elipse

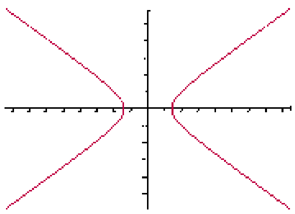


gráfico

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

→ equação da elipse de centro C e semieixos a e b.

☐ Hipérbole

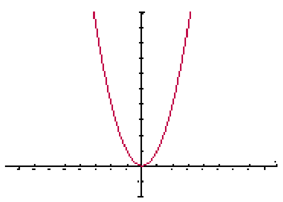


gráfico

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \rightarrow$$

equação da hipérbole de centro C e semieixos a e b.

☐ Parábola



gráfico

$(x - x_C)^2 = 2p(y - y_C) \rightarrow$ equação da parábola de vértice C e distância do foco à diretriz p

EXERCÍCIOS

1. Escreva a seqüência definida por:
a) $a_n = 3n - 5$ e $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
b) $a_n = 5n^2 - 3n + 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

2. Ache o 5º termo da seqüência definida por:
$a_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

3. Determine o quinto termo das seqüências que forem progressões aritméticas.
a) (1, 2, 4, 6, ...)
b) (−3, −1, 1, 3, ...)

4. Escreva a P.A., sabendo-se que:
a) $a_1 = -5$ e $r = 3$

5. Determine os valores de *a* e *b* na progressão aritmética (18, 15, 12, *a*, 6, 3, *b*).

6. Obter a razão de cada P.G.:
a) (5, 15, 45, ...) b) (−12, −3, −0,75)

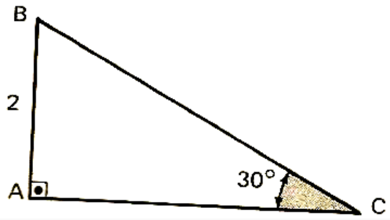
7. Determine a razão de cada P.G.:
a) (1, 3, 9, ...)
b) (16, 8, 4, ...)
c) (9, 9, 9, ...)
d) (−6, −24, −96, ...)

8. Determine o décimo termo da P.G. (1, 2, 4, ...).

9. Determine o oitavo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

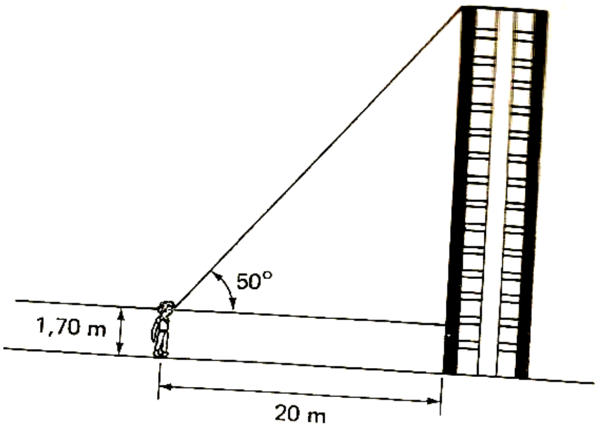
10.

Determinar a hipotenusa BC e o cateto AC no triângulo retângulo seguinte:



11.

Um observador de 1,70 m de altura avista o topo de um edifício sob ângulo de 50° com a horizontal. Se a distância do observador ao edifício é 20 m, calcule a altura do edifício. Dado: tg 50° = 1,192.



12.

Escrever sob a forma de porcentagem os seguintes números:

a) 0,96 b) 0,038

13.

Calcular:

a) 35% de 90 b) 25% de 80%

14.

Escreva sob a forma decimal as seguintes porcentagens:

a) 5% b) 64% c) 7,9%

15.

Use porcentagens para representar os números:

a) 0,36 b) 0,04 c) 0,009

16.

Calcule:

a) 22% de 70
b) 5% de 30
c) 9,1% de R$ 50,00
d) 359,1% de 770 g

17.

Calcule:

a) 6% de 20%
b) 12% de 40%
c) 32% de 45%

18.

O preço de custo de um pneu para carro é de R$ 60,00 e foi vendido com lucro de R$ 30,00.

Calcular:

a) o preço de venda
b) a taxa percentual de lucro em relação ao valor de custo

19.

O valor de custo de um telefone sem fio é de R$ 220,00. Foi vendido com 20% de lucro sobre o preço de custo. Por quanto foi vendido?

20.

O preço de custo de um aparador de grama é de R$ 160,00. Foi vendido por R$ 240,00. Qual a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo?

21.

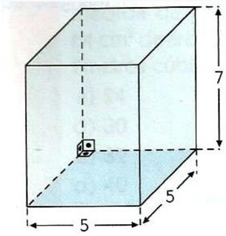
Um motor vendido por R$ 1 200,00 deu um lucro de 20% sobre o valor de venda. Qual o valor de custo desse motor?

22.

Um prisma quadrangular regular tem 7 cm de aresta lateral e 5 cm de aresta da base.

Calcular:

a) área da base
b) área lateral
c) área total
d) volume

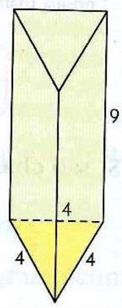


23.

Um prisma triangular regular apresenta 9 cm de aresta lateral e 4 cm de aresta da base.

Determinar:

a) área da base
b) área lateral
c) área total
d) volume



24.

Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume em cada caso:

a) prisma quadrangular regular de aresta lateral 8 cm e aresta da base 4 cm
b) prisma triangular regular de aresta lateral 2 cm e aresta da base 4 cm
c) prisma hexagonal regular de aresta lateral 6 cm e aresta da base 3 cm

25.

Um prisma quadrangular regular tem 9 cm de aresta lateral e 36 cm^2 de área da base. Determine:

a) aresta da base
b) área lateral
c) área total
d) volume

26.

Num cilindro reto, o raio da base mede 4 cm e a altura, 10 cm. Calcular:

a) área da base
b) área lateral
c) área total
d) volume

27.

A altura *h* de um cilindro reto é 6 m e o raio *r* da base mede 2 m. Determine:

a) área da base
b) área lateral
c) área total
d) volume

28.

O raio da base de um cilindro reto mede 3 cm e a altura, 9 cm. Determine:

a) área total
b) volume

29.

O raio da base de um cilindro eqüilátero mede 6 cm. Determine:

a) altura
b) área total
c) volume