Matemática 1

Centro Educacional Evolução

Credenciado pela Portaria nº. 264/2009 SEDF

Tel: (61) 3562 0920 / 3046 2090

C-1 Lote 1/12 sobreloja 1 Edifício TTC

Taguatinga-DF

www.centroevolucao.com.br

APRESENTAÇÃO

A matemática como ciência aplica-se de forma direta em nosso cotidiano. Se prestarmos atenção notaremos que em simples atitudes utilizamos os nossos conhecimentos básicos de matemática, como: observar e medir distâncias, comprimentos, velocidades, tempo; pagar e receber pagamentos, trocos etc. Por isso, caro aluno, a aprendizagem matemática não pode ser vista como OBRIGAÇÃO, pois, a matemática está presente constantemente em nosso cotidiano.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Revisando

Os números envolvidos em uma multiplicação são chamados de fatores e o resultado da multiplicação é o produto.

Quando os fatores são todos iguais existe uma forma diferente de fazer a representação dessa multiplicação que é a potenciação.

Ex.: 2 . 2 . 2 . 2 = 16 → multiplicação de fatores iguais.

Podemos representar a mesma multiplicação da seguinte forma:

$\underbrace{2 . 2 . 2 . 2} = 2^4 = 16$

expoente

base

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Lê-se 2 à quarta ou 2 elevado a 4

Base Fator que se repete: **2**

Expoente número de vezes que o factor se repete : **4**

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Lê-se -2 ao cubo ou -2 elevado a 3

Base Fator que se repete: **- 2**

Expoente número de vezes que o factor se repete: **3**

PROPRIEDADES

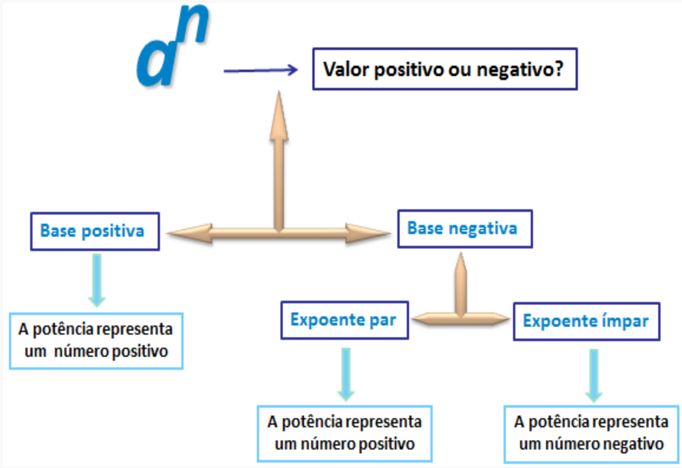
- Todo número elevado a unidade é igual a ele mesmo. Ex.: $2^1 = 2$ $15^1 = 15$
- Todo número, diferente de zero, elevado a zero é igual a 1. Ex.: $2^0 = 1$ $287^0 = 1$
- Quando elevamos a unidade a qualquer expoente, sempre encontramos como resultado a própria unidade. Ex.: $1^4 = 1$ $1^{53} = 1^{1223} = 1$
- Quando elevamos o zero a qualquer expoente diferente de zero sempre encontramos zero. Ex.: $0^3 = 0$ $0^{35} = 0$ $0^{174} = 0$
- Quando elevamos a base 10 a um expoente, sempre encontramos como resultado a unidade seguida de tantos zeros quanto for o valor de seu expoente. Ex.: $10^3 = 1000$ $10^5 = 100\ 000$ $10^6 = 1000\ 000$

Atenção: $(5+3)^2$ não é igual a 5^2+3^2

Vejamos:
- $(5+3)^2 = (8)^2 = 8x8 = 64$ e $5^2+3^2=25+9=34$
- $(5-4)^2$ não é igual 5^2-4^2

Vejamos:
- $(5-4)^2= (1)^2=1$ e $5^2-4^2=25-16=9$

SINAIS



Ex.:

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$(4)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

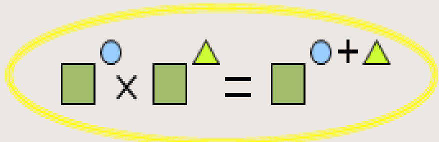
$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

OPERAÇÕES

DÁ-SE A MESMA BASE E ADICIONAM-SE OS EXPOENTES



Exemplo

$7^3x7^2 = (7x7x7) \times (7x7)$

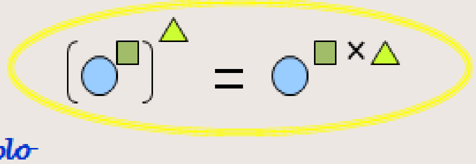
$= 7x7x7x7x7$

$= 7^5$

$= 7^{3+2}$

ENTÃO, $7^3x7^2 = 7^{3+2} = 7^5$

DÁ-SE A MESMA BASE E MULTIPLICAM-SE OS EXPOENTES



Exemplo

$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

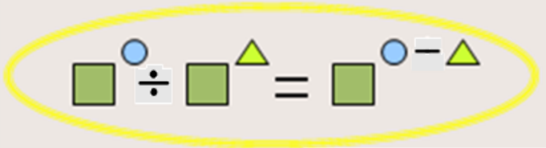
$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{3x2}$

$= 5^6$

ENTÃO, $(5^2)^3 = 5^{2x3}$

DÁ-SE A MESMA BASE E SUBTRAI-SE OS EXPOENTES



Exemplo

$\frac{5^4}{5^3} = 5^4 : 5^3$

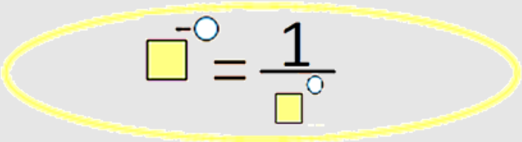
$= 5^{4-3}$

$= 5^1$

$= 5$

ENTÃO, $\frac{5^4}{5^3} = 5$

DÁ-SE A MESMA BASE COM EXPOENTE NEGATIVO INVERTE-SE A BASE E O EXPOENTE FICA POSITIVO



Exemplo

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$= \frac{1}{2x2x2}$

$= \frac{1}{8}$

ENTÃO, 2-3=$\frac{1}{8}$

RADICIAÇÃO

A Radiciação é o inverso da potenciação.

Nomenclatura:

Para facilitar as coisas, existe um meio de transformarmos uma raiz em uma potência. Assim fica muito mais fácil, pois podemos utilizar as mesmas propriedades de potenciação.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

As propriedades da radiciação são análogas as da potenciação, pois o radicando tem potencia de número fracionário.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

uma igualdade entre duas expressões onde, pelo menos numa delas, figura uma ou mais letras

Chamamos equação do primeiro grau na incógnita x, no universo real, toda equação redutível com forma:

$$a \cdot x = b,$$

Em que a e b são números reais quaisquer, com a diferente de zero. Para resolvermos esse tipo de equação, basta dividirmos ambos os membros por a:

$$\frac{a \cdot x}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Ex.:

$$4x - 12 = 8 - 6x$$
$$4x + 6x = 8 + 12$$
$$10x = 20$$
$$x = \frac{20}{10}$$
$$x = 2$$

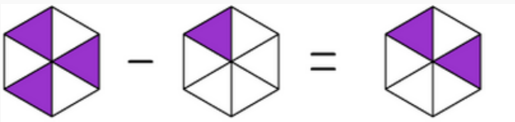
$$S = \{2\}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Denominadores Iguais

Conserva-se o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores.

$$\frac{3}{20} + \frac{5}{20} - \frac{7}{20} = \frac{3+5-7}{20} = \frac{1}{20}$$



$$\frac{3}{6} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Com Denominadores Diferentes

Substituem-se as frações dadas por outras, equivalentes, cujo denominador será o MMC dos denominadores dados:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\quad \underline{\text{mmc}\,(6,4,2)=12}\quad \frac{2+9-6}{12}=\frac{5}{12}$$

Multiplicação de Frações

Para multiplicar duas ou mais frações, deve-se:

1º) Multiplicar os numeradores, encontrando o novo numerador.

2º) Multiplicar os denominadores, encontrando o novo denominador.

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{2\times3\times1}{5\times4\times6}=\frac{6}{120}\;(\text{simplificando por } 6)=\frac{1}{20}$$

Divisão envolvendo Frações

Para efetuar uma divisão onde pelo menos um dos números envolvidos é uma fração devemos multiplicar o primeiro número (dividendo) pelo inverso do segundo (divisor).

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{4}=\frac{14}{12}\;(\text{simplifica ndo por } 2)=\frac{7}{6}$$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

As expressões numéricas podem ser definidas através de um conjunto de operações fundamentais. As operações que podemos encontrar são: radiciação, potenciação, multiplicação, divisão, adição e subtração.

Como uma expressão numérica é formada por mais de uma operação, devemos saber que resolvemos primeiramente as potências e as raízes (na ordem que aparecerem), depois a multiplicação ou divisão (na ordem) e por último, adição e subtração (na ordem).

É comum o aparecimento de sinais nas expressões numéricas, eles possuem o objetivo de organizar as expressões, como: ( ) parênteses, [ ] colchetes e { } chaves, e são utilizados para dar preferência para algumas operações. Quando aparecerem em uma expressão numérica devemos eliminá-los, essa eliminação irá acontecer na seguinte ordem: parênteses, colchetes e, por último, as chaves.

Exemplo 1:

$-62:(-5+3)-[-2.(-1+3-1)^2-16:(-1+3)^2]=$

elimine parênteses

$-62:(-2)-[-2.(2-1)^2-16:2^2]=$

continue eliminando os parênteses

$-62:(-2)-[-2.1-16:2^2]=$

resolva as potências dentro do colchetes

$-62:(-2)-[-2.1-16:4]=$

resolva as operações de multiplicação e divisão nos colchetes

$-62:(-2)-[-2-4]=$

$-62:(-2)-[-6]=$ elimine o colchete

$-62:(-2)+6=$ efetue a divisão

$31+6=37$ efetue a adição.

1º) Parênteses ( )

2º) Colchetes [ ]

3º) Chaves { }

efetuam-se, primeiro as operações dentro deles, na ordem mostrada: ( ), [ ] e { }, respeitando-se ainda, a prioridade das operações.

Exemplo 2:

36 + 2.{25 + [18 – (5 – 2).3]} =

= 36 + 2.{ 25 + [18 – 3.3]} =

= 36 + 2.{25 + [18 – 9]} =

= 36 + 2.{25 + 9} =

= 36 +2.34 =

= 36 + 68 = 104

Exemplo 3:

$[(5^2 - 6.2^2).3 + (13 - 7)^2 : 3] : 5 =$

$= [(25 - 6.4).3 + 6^2 : 3] : 5 =$

$=[(25 - 24).3 + 36 : 3] : 5 =$

= [1.3 + 12] : 5 =

= [3 + 12] : 5 =

= 15 : 5 = 3

OPERAÇÕES COM SINAIS

Sinais Iguais			
+	x ou :	+	= +
–	x ou :	–	= +
Sinais Diferentes			
+	x ou :	–	= –
–	x ou :	+	= –

Utilizar somente quando for multiplicação, divisão ou quando tiver que eliminar parênteses. Nunca utilizar em operações de adição ou subtração, neste caso quando for subtração, conservar o sinal do maior número e subtrair.

Exemplos:

(-4).(8)=-32

$(-3).(-2)=6$

$(-3)+(-4)=-3-4=-7$

$-7+3=-4$

$-3+7=4$

DICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Prezado aluno, no ENEM, vestibulares e concursos públicos as questões de matemática são em sua maioria constituídas por contextualizações envolvendo a interpretação e resolução de problemas. Isso requer do candidato preparo concentração e agilidade para entender o que está sendo cobrado e responder de forma correta em um curto espaço de tempo. E para isto é necessário desenvolver:

- Uma boa interpretação de texto – procure lembrar se você já resolveu uma questão similar e aplique o mesmo método. Primeiro tente entender o problema: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias? Faça uma figura. Outra se necessário, introduza notação adequada. Separe as condições em partes. "Lembre-se dividir para conquistar!"

- A linguagem Matemática – (construa uma estratégia para resolução do problema): perceba se você pode resolvê-lo de outra forma, talvez por um caminho mais curto! Perceba conexões entre os dados. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável.

E claro, o conhecimento dos conteúdos matemáticos – (execute a estratégia). Frequentemente está é a etapa mais fácil do problema. Preste atenção às incógnitas e procure perceber se será necessário fazer uso de alguma fórmula.

REVISE – examine a solução obtida e verifique o resultado e o argumento.

RESUMO

1. Ler atentamente o problema;
2. Dividir o problema em partes;
3. Estabelecer qual a incógnita;
4. Montar uma equação traduzindo os dados do problema e resolver;
5. Verificar se a equação é resposta do problema.

Logo, percebemos que resolver problemas requer um grande esforço pessoal.

Lembrete de símbolos utilizados	
$\in$ (pertence)	$\Rightarrow$ (implica)
$\notin$ (não pertence)	$\Leftrightarrow$ (se e somente se)
$\subset$ (está contido)	: ou | ou / (tal que ou tais que)
$\not\subset$ (não está contido)	. . . (e assim por diante)
$\supset$ (contém)	$\forall$ (qualquer que seja)
$\not\supset$ (não contém)	$\emptyset$ ou { } (conjunto vazio)
$\exists$ (existe)	$\cup$ (união)
$\nexists$ (não existe)	$\cap$ (intersecção)
$\neq$ (diferente de)	$\therefore$ (donde se conclui ou portanto)
$=$ (igual à)	$<$ (Menor)
$\vee$ (ou)	$>$ (Maior)
$\wedge$ (e)	$\alpha, \beta, \delta, \phi, \gamma, \lambda, \theta, \psi$ (Letras gregas para designar ângulos)

EXERCÍCIOS

1.

Assinale (V) ou (F). (Não esqueça as propriedades que você acabou de estudar.)

a) $2^3 \cdot 2^{20} = 2^{60}$ ( )

b) $\dfrac{2^{10}}{2^2} = 2^5$ ( )

c) $(3^2)^4 = 3^{2^4}$ ( )

d) $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$ ( )

e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = -\dfrac{3}{2}$ ( )

2.

Simplifique:

$$\frac{(a \cdot b)^5 \cdot (a \cdot c)^4}{(a \cdot b \cdot c)^2}$$

3.

Calcule:

a) $\sqrt{576}$ b) $\sqrt{2025}$

4.

Simplifique:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{243}$

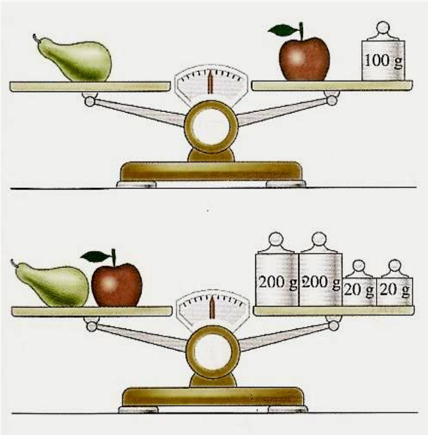
c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{147}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

5.

Colocar em ordem crescente os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$.

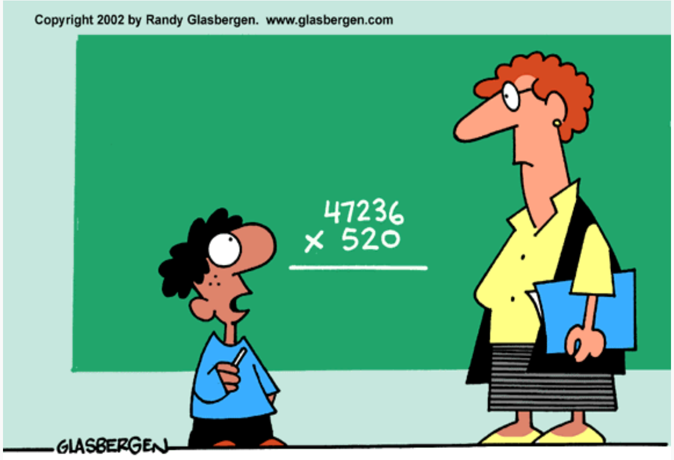
6. Resolva:



a) Chame de x a massa da pêra e de y a massa da maçã. Determine o sistema de equações correspondente a essa situação.

b) Quantos gramas têm a pêra e a maçã?

MÓDULO I



A Sra. não acha que existe muitos problemas no mundo ?

TEORIA DE CONJUNTOS

Admitiremos que um conjunto seja uma coleção de objetos, chamados elementos e que cada elemento é um dos componentes do conjunto.

REPRESENTAÇÃO E NOTAÇÃO

Geralmente, para dar nome aos conjuntos, usa-se uma letra *maiúscula* do nosso alfabeto e os elementos por letras *minúsculas*.

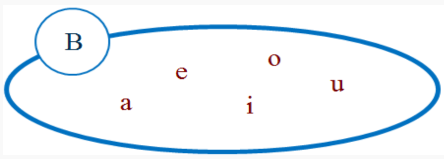
Para representação de um conjunto, utilizaremos uma das três formas seguintes:

Listagem dos elementos - Nesta representação, todos os elementos do conjunto são apresentados numa lista, envolvidos por um par de chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula.

Ex.: Conjunto dos algarismos pares, A={0, 2, 4, 6, 8, …}.

Propriedade dos elementos - Quando, pela quantidade, não for conveniente escrever todos os elementos que formam o conjunto, o descreveremos por uma propriedade possuída por todos os seus elementos. Ex.: A={ x | x é um algarismo par } Lê-se: O conjunto A é formado pelos elementos x, tal que x é um algarismo par.

Diagrama de Euler–Venn - Representamos o conjunto por um recinto plano limitado por uma curva fechada



RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

A relação de pertinência indica se um determinado elemento pertence ou não a um determinado conjunto.

Simbologia: Considerando A={0; 2; 4; 6; 8} , Assim:

SIMBOLOGIA	COMO LER
$2 \in A$	O elemento 2 pertence ao conjunto A
$3 \notin A$	O elemento 3 não pertence ao conjunto A

Quando fazemos uso da relação de pertinência, estamos, necessariamente, relacionando um elemento a um conjunto, nesta ordem.

"elemento" $\in$ "conjunto" ou "elemento" $\notin$ "conjunto"

Observação: Um elemento pertence a um conjunto se ele é "visível" ou listado no conjunto.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO

A relação de inclusão indica que se um determinado conjunto está contido ou não em outro conjunto. Se todos os elementos de um conjunto pertencem a outro, então o primeiro conjunto está contido no segundo. Basta um único elemento do primeiro conjunto não pertencer ao segundo para que o primeiro conjunto não esteja contido no segundo.

Simbologia:

SIMBOLOGIA	COMO LER
$A \subset B$	O conjunto A está contido no conjunto B
$D \not\subset E$	O conjunto D não está contido no conjunto E
$B \supset A$	O conjunto B contém o conjunto A
$E \not\supset D$	O conjunto E não contém o conjunto D

Quando fazemos uso da relação de inclusão estamos, necessariamente, relacionando um conjunto a outro conjunto.

" conjunto" $\subset$ " conjunto" ou

" conjunto" $\not\subset$ " conjunto" ou

" conjunto" $\supset$ " conjunto" ou

" conjunto" $\not\supset$ " conjunto"

Se um conjunto A está contido no conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B.

SUBCONJUNTOS

Quando todos os elementos de um conjunto A qualquer pertencem a um outro conjunto B, diz-se, então, que A é um subconjunto de B, ou seja A $\subset$ B. Observações:

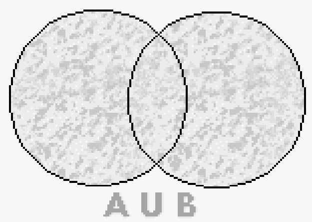
- Todo o conjunto A é subconjunto dele próprio, ou seja, $A \subset A$;
- O conjunto vazio, por convenção, é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$.

OPERAÇÕES: UNIÃO, INTERSECÇÃO E DIFERENÇA

UNIÃO DE CONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B, define-se como união dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cup B$, formado por todos os elementos pertencentes a A ou B, ou seja:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplo: Dado dois conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {6, 7}, a união deles seria pegar todos os elementos de A e de B e unir em apenas um conjunto (sem repetir os elementos comuns). O conjunto que irá representar essa união ficará assim: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. A representação da união de conjuntos é feita pelo símbolo U. Então, A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

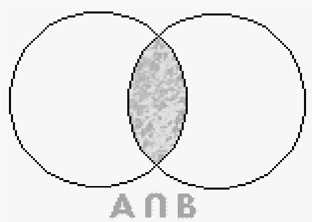
INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B, define-se como intersecção dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cap B$, formado por todos os elementos pertencentes a A e B, simultaneamente, ou seja:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Dentro da interseção de conjuntos há algumas propriedades:

1) A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto: A ∩ A = A
2) A propriedade comutatividade na intersecção de dois conjuntos é: A ∩ B = B ∩ A.
3) A propriedade associativa na intersecção de conjuntos é: A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C



Quando queremos a intersecção de dois conjuntos é o mesmo que dizer que queremos os elementos que eles têm em comum.

Exemplo: Dado dois conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {5, 6, 7}, a intersecção é representada pelo símbolo ∩, então:

A ∩ B = {5, 6},

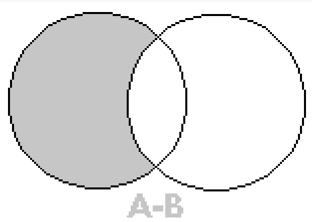
pois 5 e 6 são elementos que pertencem aos dois conjuntos. Se dois conjuntos não tem nenhum elemento comum a intersecção deles será um conjunto vazio. Dentro da interseção de conjuntos há algumas propriedades:

1) A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto: A ∩ A = A;
2) A propriedade comutatividade na intersecção de dois conjuntos é: A ∩ B = B ∩ A;
3) A propriedade associativa na intersecção de conjuntos é: A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C.

DIFERENÇA ENTRE CONJUNTO

Dados os conjuntos A e B, define-se como diferença entre A e B (nesta ordem) ao conjunto representado por A-B, formado por todos os elementos pertencentes a A, mas que não pertencem a B, ou seja:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \;\; x \notin B\}$$



Exemplo: Dado o conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e o conjunto B = {5, 6, 7} a diferença desses conjuntos é representada por outro conjunto, chamado de conjunto diferença. Então A – B serão os elementos do conjunto A menos os elementos que pertencerem ao conjunto B. Portanto

A – B = {0, 1, 2, 3, 4}.

CLASSIFICAÇÕES DE CONJUNTOS

CONJUNTO COMPLEMENTAR

Conjunto complementar está relacionado com a diferença de conjunto.

Exemplo:

A = {2, 3, 5, 6, 8}

B = {6,8}

B ⊂ A, então o conjunto complementar será C_AB = A – B = {2, 3, 5}.

CONJUNTO VAZIO

O Conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Para representarmos o conjunto vazio usaremos os símbolos: { } ou ∅.

Atenção: Quando os símbolos { } ou ∅, aparecerem listados ou visíveis, dentro de um conjunto, o conjunto vazio deverá ser tratado como elemento desse conjunto especificado.

Ex.: Seja o conjunto A={∅; 1; 2; 3}, é correto afirmar para o conjunto A listado, que ∅ ∈ A , pois ∅ é um elemento do conjunto A. Também sempre será verdade que:

i) ∅ ⊂ A para qualquer que seja o conjunto A.

ii) A ⊂ A para qualquer que seja o conjunto A.

CONJUNTO UNITÁRIO

É o conjunto que possui apenas um elemento.

CONJUNTO DAS PARTES

Dado um conjunto A com um número finito de elementos, dizemos que o conjunto das partes de A é aquele formado por todos os subconjuntos de A. Denotamos o conjunto das partes de A por P(A).

Ex.: A={a, b, c}, P(A)={ ∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c},{b, c},{a, b, c}}

Atenção: Lembre-se que dentre os subconjuntos de um dado conjunto, estão o conjunto vazio e o próprio conjunto.

Ex.: Seja B = {a, e, i}, encontre P(B).

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois ou mais conjuntos são iguais quando apresentam os mesmos elementos, em qualquer ordem, sendo que elementos iguais, num mesmo conjunto, serão considerados uma única vez.

Daí, podemos afirmar que é verdadeira a igualdade dada por: A= { a; b; c} = { c; b; a} = { a; a; a; b; b; b; c; c}

Simbolicamente a igualdade entre conjuntos fica definida como:

A = B ⇔ A ⊂ B e B ⊂ A.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos foram surgindo, à medida que foi se tornando necessário apresentar resultados para algumas operações matemáticas.

Com a necessidade de contar quantidades, surgiu o conjunto dos números naturais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS (ℕ)

O (ℕ): É o conjunto ℕ ={ 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...}.

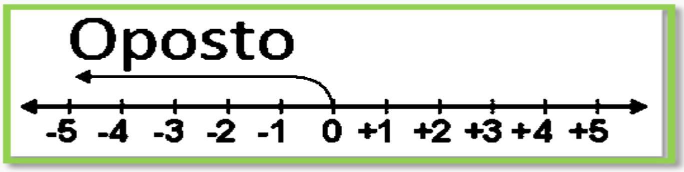
Um subconjunto importante de ℕ é o ℕ*: ℕ*={1; 2; 3; 4; 5; ...} ou ℕ*= ℕ-{0}. Em ℕ é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois números naturais resultam sempre em um número natural. Já a divisão ou subtração entre dois números naturais nem sempre é um número natural; a subtração 2-3, por exemplo, não é possível em ℕ. Daí a necessidade de ampliar o conjunto ℕ introduzindo os números negativos.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS (ℤ)

O conjunto dos números inteiros (ℤ): Ou conjunto dos números relativos, é o conjunto ℤ ={...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...}.

Podemos destacar os seguintes subconjuntos de ℤ: ℕ, pois ℕ ⊂ ℤ. ℤ*=ℤ–{0} ou ℤ *={...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...}

Geometricamente temos:



Observe que há uma simetria em relação ao zero. O oposto ou simétrico de 3 é −3, oposto ou simétrico de -3 é o 3, valendo 3+(-3)=-3+3 = 0. Quando os números têm o mesmo sinal basta conservá-lo e adicionar os números; quando os sinais são contrários subtraímos o menor do maior, e o sinal que prevalece é o deste último.

É bom lembrar também que o sinal mais (+) antes de um parêntese não vai alterar o sinal do número que está entre parênteses, ocorrendo o oposto quando o sinal antes do parêntese for o de (–).

Se não houver nenhum sinal antes do parêntese estará implícito que o sinal será o de mais (+).

Para as operações de multiplicação e divisão que virão logo a seguir vale a seguinte regra: "Números de mesmo sinal dão sempre resultado positivo, enquanto que os de sinais contrários conduzem sempre à resultados negativos".

No conjunto ℤ, sempre é possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de dois números inteiros resultam sempre um número inteiro. E todas as propriedades das operações em ℕ continuam válidas em ℤ. Já da divisão de dois números inteiros nem sempre resulta um número inteiro:

(-8) : (+2)=-4 → é possível em ℤ.

(-7) : (+2)=? → não é possível em ℤ.

Daí a necessidade de ampliar o conjunto ℤ.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS (ℚ

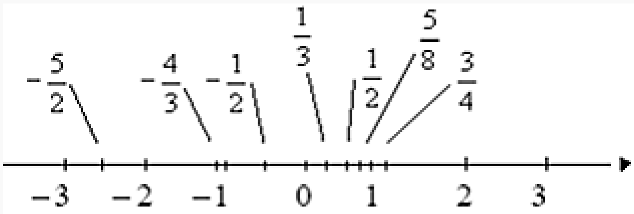
O conjunto dos números racionais (ℚ): Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto ℤ, obtemos o conjunto dos números racionais ℚ. Assim, por exemplo, são números racionais todo número escrito na forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, com\ a \in Z\ e\ b \in Z^* \right\}$$

Perceba que a restrição b∈ℤ*, nos obriga a termos b≠0, pois, a divisão de a por b, só tem significado com b≠0. A designação racional surgiu porque b pode ser visto como uma razão entre os inteiros a e b.

A letra ℚ, que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra quociente. Os números racionais podem ser encontrados de três maneiras: número inteiro ou número decimal exato ou número decimal periódico (dízimas periódicas).

Representação geométrica de alguns racionais:



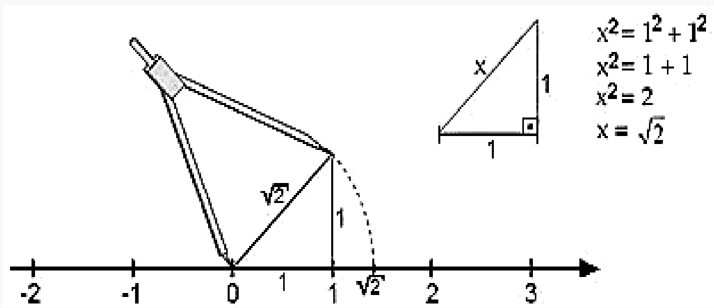
CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS (ℝ-ℚ)

Os números que não podem ser escrito na forma fracionária, com numerador inteiro e denominador inteiro (diferente de zero). São as decimais infinitas e não periódicas. Exemplos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135...;\ \sqrt{3} = 1{,}7320508...;\ \pi = 3{,}1415926535...$$

são números irracionais.

Representação geométrica de alguns irracionais:



O conjunto dos números irracionais não possui símbolo específico, mas pode ser representado por (ℝ-ℚ).

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS ($\mathbb{R}$)

Todos os números que podemos representar na reta, os racionais e os irracionais, são chamados números reais ($\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$), denotados por $\mathbb{R}$. Observamos que a cada ponto da reta podemos fazer corresponder um número real, e a todo número real podemos fazer corresponder um ponto da reta.

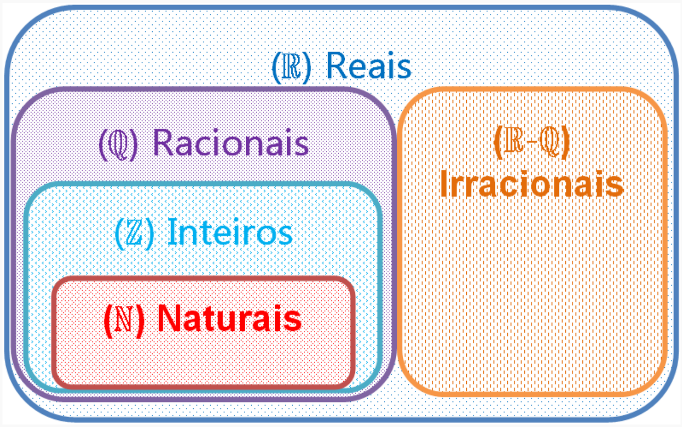
Assim:

"Número real é todo número racional ou irracional."

Pode-se estabelecer certa ordem entre os subconjuntos de $\mathbb{R}$, uma ordem determinada por relações de inclusão entre os conjuntos numéricos.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$



PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ é fechado em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão por números reais diferentes de zero. O conjunto dos números reais é denso, isto é, há infinitos reais entre dois reais quaisquer e, da mesma forma que o conjunto dos irracionais, não é enumerável.

Vejamos, então, as propriedades válidas em $\mathbb{R}$.

1. Adição e multiplicação

Associativa

Podemos associar, de formas diferentes, quaisquer números reais a, b e c:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Exemplos

Sejam os reais $-\frac{1}{2}$, 2 e 1,5

$$\left(-\frac{1}{2}+2\right) + 1{,}5 = -\frac{1}{2} + (2+1{,}5)$$

$$(-0{,}5 + 2) + 1{,}5 = -0{,}5 + (2 + 1{,}5)$$

$$1{,}5 + 1{,}5 = -0{,}5 + 3{,}5 \rightarrow 3{,}0 = 3{,}0 \text{ (V)}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot 1{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1{,}5)$$

$$(-1) \cdot 1{,}5 = -0{,}5 \cdot 3{,}0 \rightarrow -1{,}5 = -1{,}5 \text{ (V)}$$

Comutativa

A ordem das parcelas não altera a soma ou a ordem dos fatores não altera o produto, para quaisquer números reais a e b:

$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$

Exemplos

Sejam os reais $-\frac{1}{2}$ e 2

$$-\frac{1}{2}+2=2+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-0{,}5+2=2-0{,}5 \rightarrow 1{,}5=1{,}5 \text{ (V)}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2=2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow -1=-1 \text{ (V)}$$

Elemento neutro

Zero é o elemento neutro da adição, para qualquer número real a.

$a + 0 = 0 + a = a$

Um é o elemento neutro da multiplicação, para qualquer número real a.

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Exemplos

Seja o número real $-\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2}+0=0+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 1=1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Elemento oposto

Qualquer que seja o valor do número real a, existe um número real –a, tal que:

$a + (-a) = 0$ e $(-a) + a = 0$

Exemplo

Seja o número real $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ e } \left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=0$$

Elemento inverso

Qualquer que seja o número real a, a ≠0,

existe um real $\left(\frac{1}{a} \text{ ou } a^{-1}\right)$, tal que:

$$a \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$$

Exemplo

Seja o número real $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Distributiva

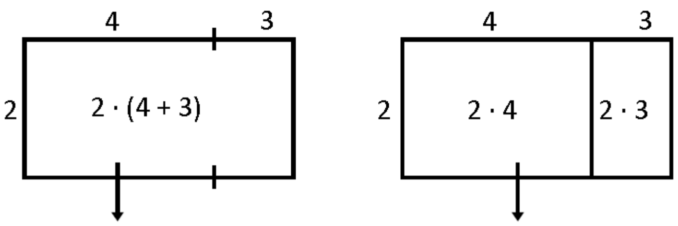
Quaisquer que sejam a, b e c, temos:

a · (b + c) = a · b + a · c

(b + c) · a = b · a + c · a

Exemplo

A área dos retângulos abaixo ilustra a propriedade distributiva.



$2 \cdot (4+3) \quad = \quad 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$

$2 \cdot (7) \quad = \quad 8 + 6$

$14 \quad = \quad 14$ (V)

PRODUTO E PLANO CARTESIANO

O Plano Cartesiano foi criado pelo matemático René Descartes (1596-1650). Como ele associava a geometria à álgebra, esta foi a forma que ele criou para representar graficamente expressões algébricas. A sua utilização mais simples é a de representar graficamente a localização de pontos em um determinado plano. Através dele também podemos representar um segmento de reta ou um triângulo, por exemplo.

Quando estudamos o plano cartesiano vimos também o conceito de par ordenado. Agora com base nestes conceitos estudaremos o produto cartesiano.

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B são todos os pares ordenados (x, y), sendo que x pertence ao conjunto A e y pertence ao conjunto B.

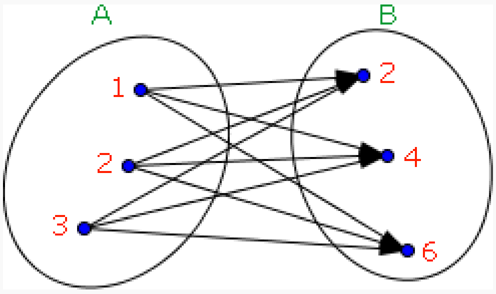
Vamos tomar como exemplo os seguintes conjuntos A e B:
A = {1, 2, 3}   B = {2, 4, 6}

O produto cartesiano de A por B, representado por é igual a:

AxB = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)}

Note que segundo a definição de produto cartesiano, todos os elementos de são pares ordenados em que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo ao conjunto B.

Representação em um Diagrama de Flechas

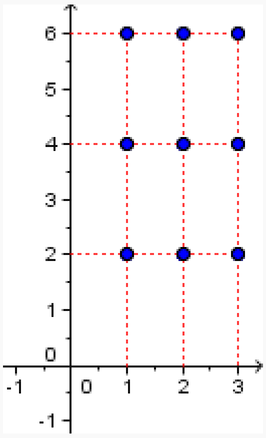


Também podemos representar AxB através de um diagrama de flechas. Repare que de cada elemento de A parte uma seta para cada elemento de B: No total são 9 flechas, uma para cada par ordenado resultante do produto cartesiano de A por B.

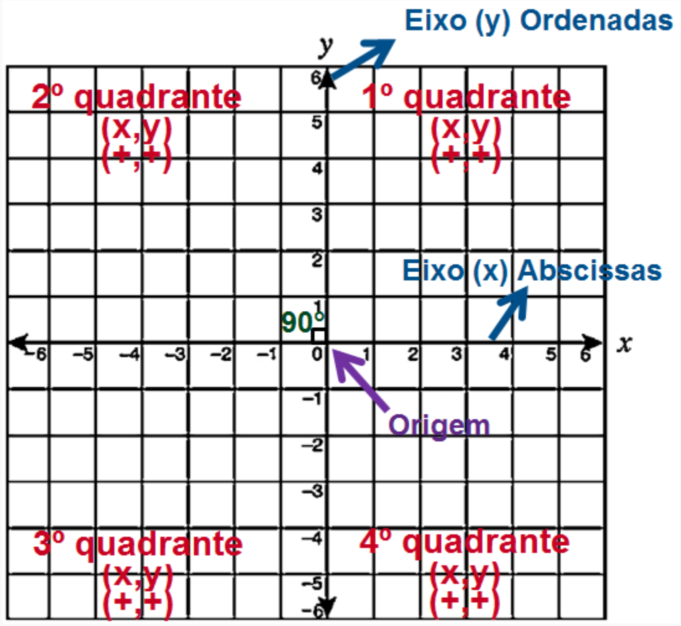
Representação no Plano Cartesiano

O plano cartesiano é composto de duas retas perpendiculares (90°) e orientadas, uma horizontal e outra vertical. Damos no nome de eixo x ou eixo das abscissas à reta horizontal. À vertical denominamos de eixo y ou eixo das ordenadas.

Veja que graficamente localizamos no plano cartesiano todos os nove elementos de:



Os elementos de A e B estão representados respectivamente nos eixos x e y.



Finalmente também podemos representar por:

AxB = {(x, y) | x ∈ A e y ∈ B}

A cartesiano B é o conjunto dos pares ordenados (x, y), tal que x pertence a A e y pertence a B.

REPRESENTAÇÃO DE PONTOS NO PLANO

A representação de pontos neste plano é feita por meio de pares ordenados, onde o primeiro número se refere à abscissa e o segundo a ordenada.

O ponto P1(3, 2) tem abscissa 3 e ordenada 2, no qual o símbolo (3, 2) representa um par ordenado.

O ponto P2(2, 3) tem abscissa 2 e ordenada 3.

É importante frisarmos que os pontos P1 e P2 são pontos distintos, pois em um par ordenado a ordem dos números é relevante.

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se a = c e b = d.

Ao ponto localizado no cruzamento de ambos os eixos damos o nome de origem do sistema de coordenadas cartesianas, representado por O (0, 0).

QUADRANTES DO PLANO CARTESIANO

Os quadrantes são dispostos em sentido anti-horário.

SINAL DO PLANO

Sinal da Abscissa e da Ordenada de um Ponto. Todos os pontos no primeiro quadrante possuem abscissa e ordenada positivas. Exemplo: P1(3, 5).

No segundo quadrantes todos os pontos possuem abscissa negativa e ordenada positiva.

Exemplo: P2(-4, 2).

Todos os pontos no terceiro quadrante possuem abscissa e ordenada negativas. Exemplo: P3(-7, -1).

No quarto quadrante todos os pontos possuem abscissa positiva e ordenada negativa. Exemplo: P2(8, -3).

FUNÇÕES

As funções são utilizadas na representação cotidiana de situações que envolvam valores constantes e variáveis, sempre colocando um valor em função do outro. Abordaremos as situações problemas ligadas às equações do 1º grau, respeitando a lei de formação f(x)=a.x+b, com a ≠ 0.

Por exemplo, ao abastecermos o carro no posto de gasolina, o preço a ser pago depende da quantidade de litros de combustível colocada no tanque.

Exemplo: O preço do litro da gasolina em um posto é R$ 2,50. Observe a tabela a seguir:

Litros (x)	Valor a pagar (y) ou f(x)
1	R$ 2,50
2	R$ 5,00
3	R$ 7,50
4	R$ 10,00
5	R$ 12,50
10	R$ 25,00
15	R$ 37,50
20	R$ 50,00
...	...

O total a pagar depende da quantidade de gasolina abastecida. Podemos estabelecer uma relação entre a quantidade de litros de gasolina e o valor a ser pago: f(x): preço a pagar (varia de acordo com a quantidade de litros abastecidos) x: litros (variável) y: preço do litro (valor pré-fixado). Temos que a lei de formação da função é: f(x)=2,50.x

Exemplo: Um motorista de táxi cobra R$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

Função que define o valor a ser cobrado por uma corrida de x quilômetros: f(x)=0,70.x+3,50. Valor a ser pago por uma corrida de percurso igual a 18 quilômetros.

f(x)=0,70.x+3,50

f(18)=0,70.18+3,50

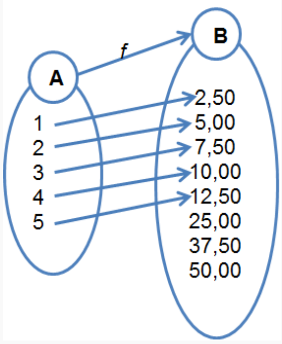
f(18)=12,60+3,50

y=16,10 reais

RELAÇÃO E FUNÇÃO

Função é qualquer relação de A em B que associa a cada elemento de A um único elemento de B.

Observe o diagrama de *Venn* a seguir:



Todo o processo que faz corresponder a cada elemento x de um conjunto A um e um só elemento y do conjunto B é uma correspondência que se chama aplicação ou função de A em B.

Representando a função por *f*, podemos escrever: f A→B

x→ *f* x=y

O conjunto A – conjunto de partida – é o domínio da função. Representa-se por . D_f.

O conjunto B designa-se por conjunto de chegada.

Os elementos do domínio designam-se por objetos e os respectivos elementos do conjunto B designam-se por imagens.

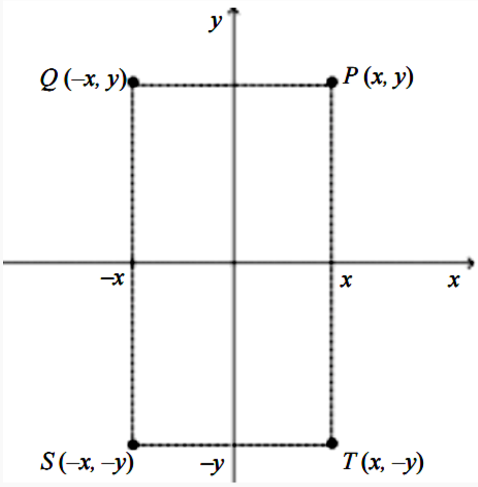
O x é a variável independente e y é a variável dependente.

O contradomínio é o conjunto das imagens. Representa-se por D'_f.

Não confunda *f* com f(x)! *f* designa uma função com o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a indicação do processo para encontrar a imagem de cada elemento do domínio, f(x) representa a imagem do objeto x do domínio, pela função *f*.

NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

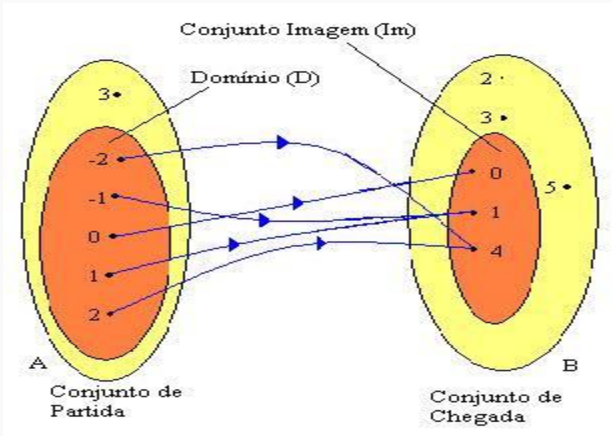
Os quatro quadrantes em que um plano cartesiano fica dividido por seus dois eixos oferecem várias oportunidades de aplicar a idéia de transformações a desenhos de funções. Para entender como funciona, vamos pensar em um ponto P representado por um par (x,y). Se os números x e y forem positivos não nulos, então o ponto está representado no primeiro quadrante. O que ocorre se tomarmos o ponto Q representado pelo par (-x,y)? O ponto terá a mesma ordenada y que o ponto P, mas vai ocupar o lugar simétrico ao ponto P em relação ao eixo y. Se tomarmos o ponto T (x,-y), esse ponto é simétrico a P em relação ao eixo x. Já um ponto S (-x,-y) está no terceiro quadrante. Ele pode ser obtido a partir de P por meio de uma rotação em torno da origem (0,0) e de ângulo 180°. Note que S pode também ser obtido a partir de P por duas sucessivas reflexões em relação aos eixos coordenados. Veja a ilustração abaixo:



DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO

Chama-se domínio o conjunto de todos os elementos de A que está associado à pelo menos um elemento de B. Chama-se imagem o conjunto de todos os elementos de B que são imagens de pelo menos um elemento de A. E contradomínio todos os elementos de B (conjunto de chegada).

Ex.:



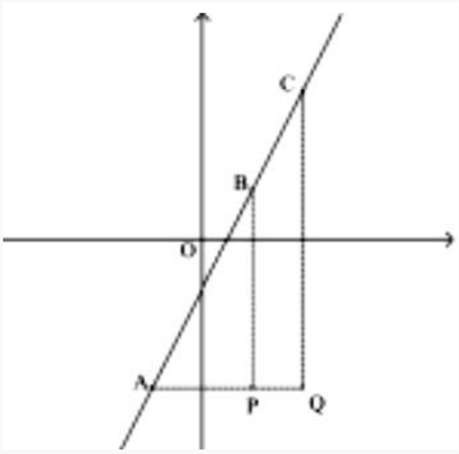
Função Sobrejetiva: Uma função *f* diz-se sobrejetiva se o seu contradomínio coincide com o seu conjunto de chegada.

Função Injetiva: Uma função f diz-se injetiva se quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.

Função Bijetiva: Uma função f diz-se bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Uma função polinomial de primeiro grau é da forma y = ax + b, onde a e b são constantes, x é a variável independente, y é a variável dependente e a ≠ 0. Observemos que, se a = 0, temos y = b, que é uma função constante. O gráfico de y = b é uma reta horizontal, ou seja, uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois para qualquer valor de x, o valor de y é sempre o mesmo: b. Nesse caso, a função y = b é uma função polinomial de grau zero. Quando a ≠ 0, o gráfico de y = ax + b é uma reta não horizontal mas também não vertical – lembre que uma reta vertical não pode ser gráfico de uma função. Vamos entender porque o gráfico de y = ax + b é uma reta.



Ou seja, toda função do tipo y=m.x+b, que é polinômio de grau 1, tem por gráfico uma reta. A estas funções chamam-se funções afins.

FUNÇÃO AFIM E LINEAR

Definição: Uma função f: ℝ → ℝ (f de ℝ em ℝ) chama-se função afim quando existem dois números reais a e b tal que f(x) = ax + b, para todo x ϵ ℝ.

Exemplos:

1) f(x) = 2x + 1 (a = 2, b = 1)

2) f(x) = -x + 4 (a = -1, b = 4)

3) f(x) = 3/1 x + 5 (a = 3/1 , b = 5)

4) f(x) = 4x (a = 4, b = 0)

Valor de uma função afim

Na função afim f(x) = 5x + 1, podemos determinar: f(1) = 5 • 1 +1 = 5 + 1 = 6. Logo, f(1) = 6

f(-3)=5(-3) + 1 = -15 + 1 = -14

Logo, f(-3) = -14

Casos particulares importantes da função afim 1ª) Função linear

f: ℝ → ℝ definida por f(x) = ax para todo x ϵ ℝ. Nesse caso, b = 0. Exemplos:

f(x) = -2x (a= -2, b = 0)

f(x) = 5/1 x (a = 5/1 , b = 0)

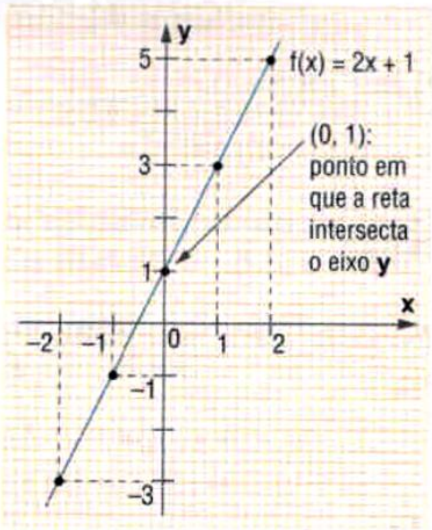
Traçado de gráficos de funções afins e lineares

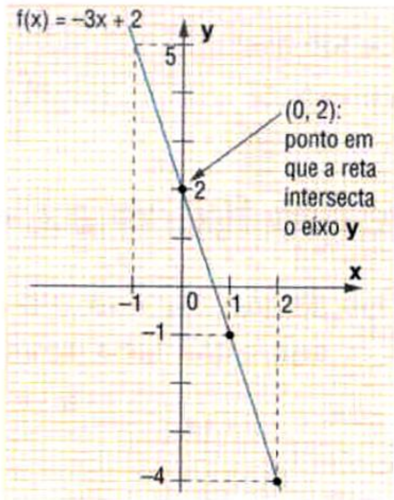
Construindo gráficos de algumas funções afins e lineares no plano cartesiano.

Função afim com a ≠ 0 e b ≠ 0

f(x) = 2x + 1

x	f(x)
−2	−3
2	5





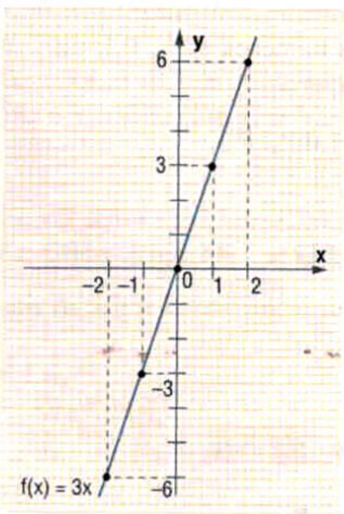
f(x) = −3x + 2

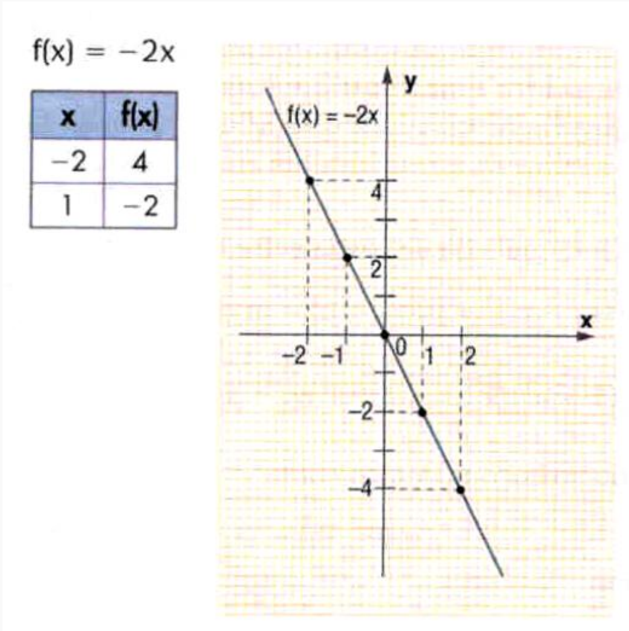
x	f(x)
0	2
1	−1

Função linear (b = 0)

f(x) = 3x

x	f(x)
−1	−3
1	3





O gráfico da função linear f(x) = ax é uma reta não-vertical que passa pela origem (0, 0).

COEFICIENTE ANGULAR, LINEAR E ZERO DA FUNÇÃO

Dada a representação f(x) = a x + b temos, “a”, é chamado de coeficiente Angular ou taxa de variação e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox. O termo constante “b”, é chamado de Coeficiente Linear da reta(também chamado intercepto).

Para x=0, temos y = a.0 + b então, y=b Assim, o Coeficiente Linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy

Raiz ou zero da função do 1º grau do tipo f(x) = ax + b é o valor de x que anula a função, isto é, f(x) = 0. Algebricamente, basta resolver a equação ax + b = 0. Geometricamente, é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

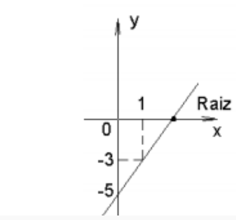
Algebricamente

$2x - 5 = 0$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$

Graficamente



Estudo do sinal Estudar o sinal de uma função f(x) significa determinar para que valores de x ∈ ao domínio da função a imagem f(x) será positiva, negativa ou nula, ou seja f(x) > 0, f(x) < 0 ou f(x) = 0.

FUNÇÃO DEFINIDA POR FÓRMULA

Existe um interesse especial no estudo de função em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

Exemplo 1:

A lei de correspondência que associa cada número real x ao número y o dobro de x, é uma função definida pela fórmula y = 2x, ou f(x) = 2x. O domínio e o conjunto imagem dessa função são ℝ. A notação da função é, portanto, f: ℝ → ℝ tal que f(x) = 2x. Nessa função temos:

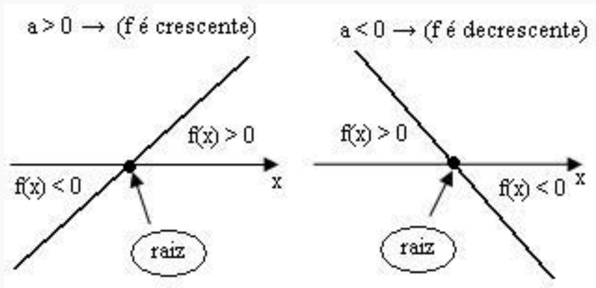
- Para x = 5, vem y = 2.5 = 10. Dizemos que f(5) = 10.
- A imagem de x = -3 é f(-3) = 2.(-3); f(-3) = -6.
- x = 11,5 corresponde a y = 2. (11,5) = 23.

ESTUDO DOS SINAIS DE F(X) = AX + B

Para fazermos o estudo dos sinais da função de 1º grau, precisamos antes estabelecer uma importante propriedade dessa função. Uma função de 1º grau, f(x) = ax + b:

- é crescente se a > 0
- é decrescente se a < 0

F(x) = ax + b



ESTUDO DIRIGIDO

1) Encontre os valores para a e b:

$y = 2x+3$ R: (a=2; b=3)

$y = 5x -1$ R: (a=5; b=-1)

2) Dado $f(x) = 3x+1$, calcule $f(5)$

Dica: o valor de 5, substitui a variável x. R:$f(5)= 16$

FUNÇÃO DO 2º GRAU (QUADRÁTICA)

As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em situações relacionadas à Física envolvendo movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo, etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas; na Administração e Contabilidade relacionando as funções custo, receita e lucro; e na Engenharia Civil presente nas diversas construções.

A função do 2º grau, também denominada função quadrática, é definida pela expressão do tipo:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$

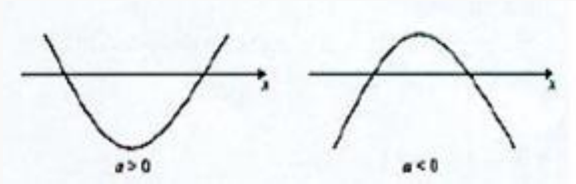
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Portanto, denominamos função do segundo grau a qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com ≠ 0). Os gráficos das funções do 2° grau são sempre parábolas.

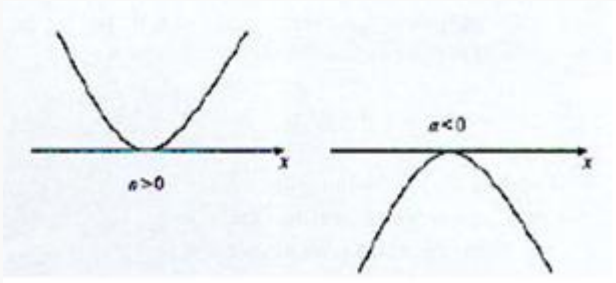
O que é exatamente uma parábola? As parábolas são curvas especiais construídas de uma tal maneira que cada um dos infinitos pontos que formam a parábola ficam à mesma distância de uma certa reta (reta diretriz da parábola) e de um certo ponto (foco da parábola) que está fora da reta diretriz.

Na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, o valor $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado discriminante da expressão quadrática. Dependendo do sinal do discriminante (Δ) e também do sinal de a, teremos uma das seis situações descritas abaixo, que mostram a posição da parábola em relação ao eixo horizontal:

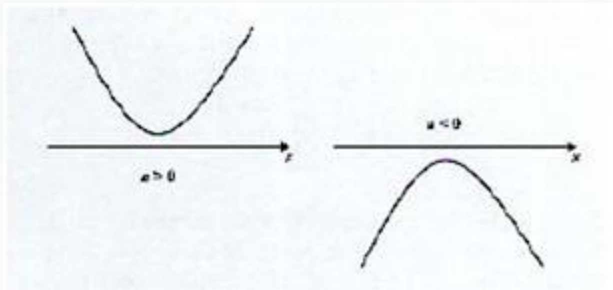
1ª) Se $\Delta > 0$ há duas raízes reais e a parábola encontrará o eixo horizontal (x) em dois pontos distintos (que são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$).



2ª) Se $\Delta = 0$ há uma só raiz real e a parábola encontrará o eixo horizontal em um único ponto (que é a única raiz de $ax^2 + bx + c = 0$).

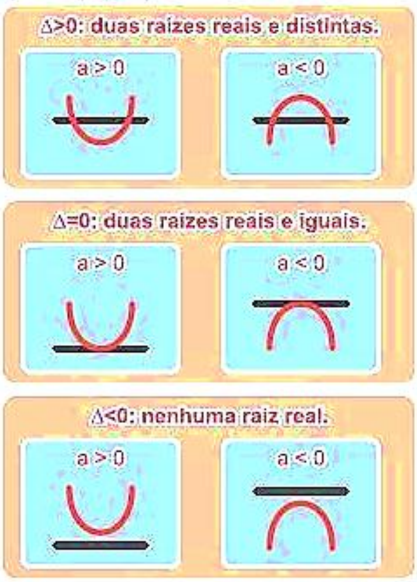


3ª) Se $D < 0$ não há raízes reais e o gráfico não encontrará o eixo horizontal.



CONCAVIDADE, ZEROS DA FUNÇÃO E VÉRTICE

A toda a função, real de variável real, do tipo $y=a.x^2+b.x+c$, com a diferente de 0, que é polinómio de grau 2, chama-se função quadrática. A sua representação gráfica é uma parábola em que:



Vértice de uma parábola $y = ax^2 + bx + c$: local do gráfico em que se encontra o máximo (se a<0) ou o mínimo (se a>0).

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

A parábola tem um eixo de simetria que passa pelo vértice da parábola.

Curiosidade

Dedução da Fórmula de Resolução de Equações do segundo grau.

Deduzir a fórmula de é encontrar a fórmula que nos permite calcular as possíveis raízes reais da equação:

$a.x^2 + b.x + c = 0$, com *a diferente de 0*

Sendo assim temos:

$a.x^2+b.x+c=0$

$a.x^2+b.x=c$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(4.a)$: $4.a^2.x^2+4.a.b.x=-4.a.c$

Somando-se b^2 a ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=-4ac+b^2$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$
$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Como queríamos demonstrar.

ESTUDO DIRIGIDO

1º) Identifique os coeficientes a, b e c:

a) $y= x^2+3x+2$ (a=1, b=3, c=2)

b) $y= x^2$ (a=1, b=0, c= 0)

c) $y= x^2-4$ (a=1, b=0, c=-4)

VÉRTICE DA PARÁBOLA

O vértice de uma parábola é um ponto da parábola com várias características interessantes. Ele será o ponto mais alto (ponto de máximo) ou o ponto mais baixo (ponto de mínimo) da parábola. Além disto, o vértice da parábola divide a parábola em duas partes, sendo uma crescente e outra decrescente.

COORDENADAS DO VÉRTICE

As coordenadas do vértice podem ser obtidas com as seguintes expressões:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Uma forma alternativa de se conseguir estas coordenadas é fazendo:

1º) Conhecidas as raízes da função, o x do vértice pode ser calculado como a média aritmética das raízes da função.

2º) Conhecido o valor de x, pode-se calcular o y do vértice como o valor que a função assume para x = x y:

$$y_v = a(x_v)^2 + b(x_v) + c$$

O vértice da parábola será:

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

ponto de mínimo sempre que a > 0;

ponto de máximo sempre que a < 0.

Exemplo: Determine as coordenada do vértice da parábola $y= x^2 - 4x + 3$. Temos: a=1, b=-4 e c=3

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, a coordenada x será igual a 2, mas e a coordenada y?

Simples: Vamos substituir o valor obtido da coordenada x e determinar o valor da coordenada y.

Assim, para determinarmos a coordenada y da parábola $y=x^2 - 4x + 3$, devemos substituir o valor de x por 2.

y = (2)² - 4.(2) + 3 = 4 – 8 + 3 = -1

Logo, as coordenadas do vértice serão V = (2,-1). Portanto, para determinarmos as coordenadas do vértice de uma parábola, achamos o valor da coordenada x (através de x=-b/2a) e substituindo este valor na função, achamos a coordenada y!!!

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ZERO DA FUNÇÃO

Como determinar a raiz ou zero da função do 2º grau? Para a resolução desta é necessário recorremos à fórmula de Bháskara, qual seja:

Exemplo: Determine a raiz da função y = x² + 5x + 6: Fazendo y = f(x) = 0, temos x² + 5x + 6 = 0

Aplicando a fórmula descrita acima acham-se dois resultados: um resultado considerando o sinal positivo da raiz e o outro considerando-a como negativa. Assim, acharemos que x' = -2 e x" = -3.

ESTUDO DIRIGIDO

1) Calcule a raiz das equações:

Dica: utilize a fórmula dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. x² -x -20 (x'=5, x"=-4)

b. x² -3x -4 (x'=4, x"=-1)

IMAGEM

O conjunto imagem da função quadrática y = ax² + bx + c é determinado a partir da ordenada (Yv) da parábola. Consideramos dois casos:

Se a > 0 Apresenta um ponto de mínimo, em Yv. Assim:

$$Im\,(f) = \{y \in R \mid y \geq Yv\}$$

Se a > 0 Se a < 0 Apresenta um ponto de máximo em Yv. Assim:

$$Im\,(f) = \{y \in R \mid y \leq Yv\}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra, é denominada função. A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por x se encontra no expoente. Observe:

$y = 2^x$

$y = 3^{x+4}$

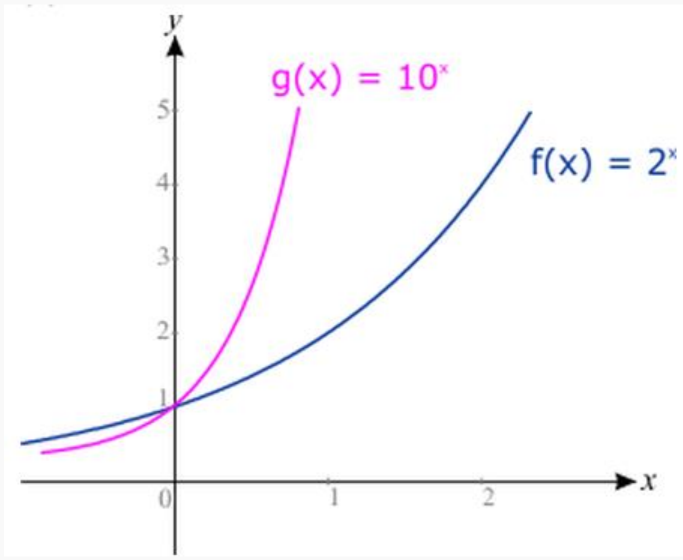
$y = 0,5^x$

$y = 4^x$

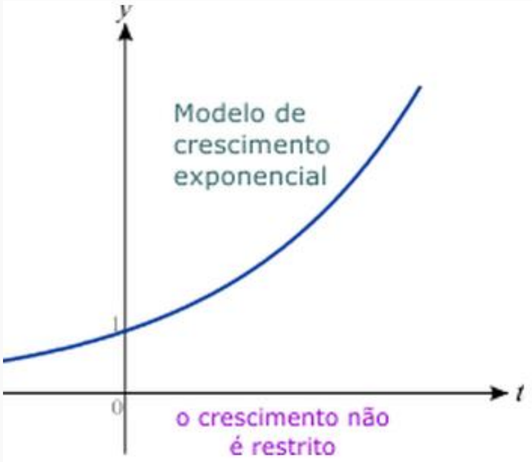
A lei de formação de uma função exponencial indica que a base elevada ao expoente x precisa ser maior que zero e diferente de um, conforme a seguinte notação:

$$f(x) = b^x, \quad b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

onde o número *b* é denominado base. A figura abaixo mostra os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 10^x$

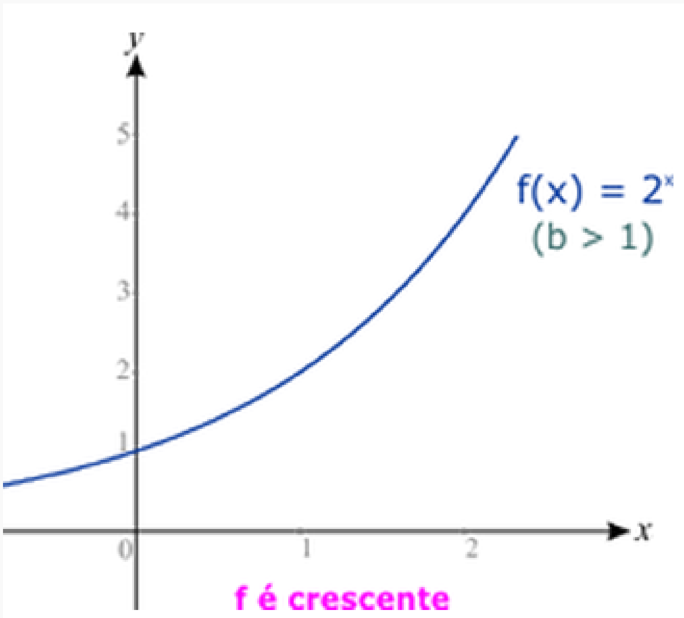


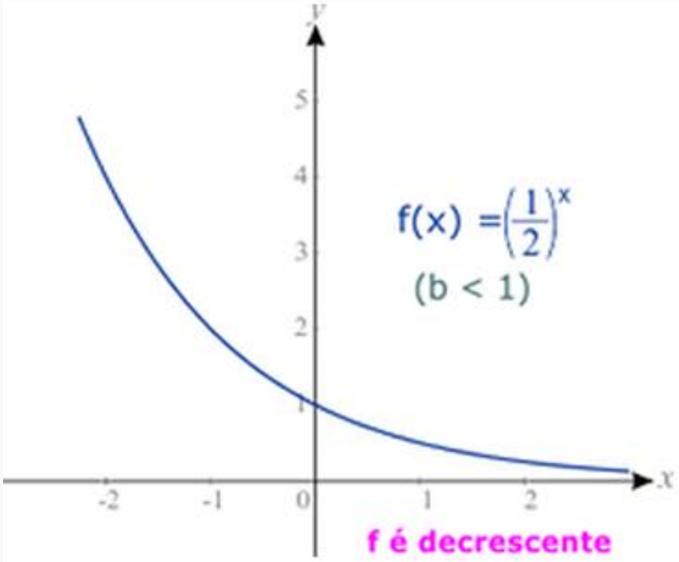
Funções exponenciais são geralmente utilizadas para representar o *crescimento* (*decrescimento*) de uma quantidade ou de uma população.



Observe que:

- Assim como todas as funções do tipo $f(x) = b^x$, são funções passam pelo ponto (0,1).
- Funções exponenciais são sempre positivas: $b^x > 0, \forall x$.
- $f(x) = b^x$ é *crescente* se b > 1 e *decrescente* se 0 < b < 1.





- O domínio de $f(x) = b^x$ é o conjunto de todos os números reais.
- A imagem de $f(x) = b^x$ é o conjunto de todos os números reais positivos -]0,+ ∞[.
- Quanto maior for a base da função $f(x) = b^x$, mais inclinado é o seu gráfico.
- A função $f(x) = e^x$, cuja base é a constante de Euler e ($\approx 2,718$), desempenha um papel muito importante nas aplicações e será referida como a função exponencial.

Regras de expoentes (b > 0):

Expoente zero	$b^0 = 1$
Produto	$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
Quociente	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
Expoente Negativo	$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$
Potência de Potência	$(b^x)^y = b^{xy}$
Raiz	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ $\quad b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$

INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS

Representação da Função Exponencial no Plano Cartesiano

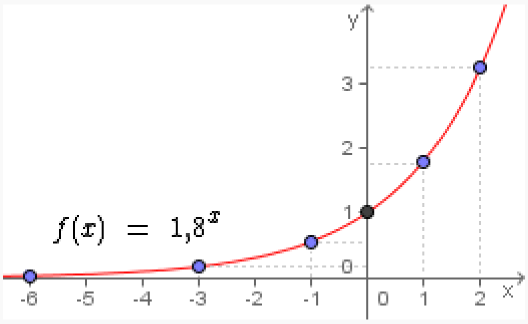
Para representarmos graficamente uma função exponencial, podemos fazê-lo da mesma forma que fizemos com a função quadrática, ou seja, arbitrarmos alguns valores para x, montarmos uma tabela com os respectivos valores de f(x), localizarmos os pontos no plano cartesiano e traçarmos a curva do gráfico.

Para a representação gráfica da função $f(x) = 1{,}8^x$ arbitraremos os seguinte valores para x:

-6, -3, -1, 0, 1 e 2.

Montando a tabela temos:

x	$y = 1{,}8^x$
-6	$y = 1{,}8^{-6} = 0.03$
-3	$y = 1{,}8^{-3} = 0.17$
-1	$y = 1{,}8^{-1} = 0.56$
0	$y = 1{,}8^{0} = 1$
1	$y = 1{,}8^{1} = 1.8$
2	$y = 1{,}8^{2} = 3.24$



Ao lado temos o gráfico desta função exponencial, onde localizamos cada um dos pontos obtidos da tabela e os interligamos através da curva da função:

EXERCÍCIOS

1.

Reescreva cada sentença abaixo usando as notações da teoria dos conjuntos:

a) x não é elemento do conjunto A.

b) O conjunto A não é subconjunto do conjunto B.

c) x é um elemento do conjunto B.

d) O conjunto A é parte do conjunto B.

2.

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, faça um diagrama de Venn e assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada item abaixo:

a) ( ) $A \subset B$ b) ( ) $B \subset A$ c) ( ) $A \subset C$

d) ( ) $\{0; 3\} \subset A$ e) ( ) $C \supset B$

3.

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

a) $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros positivos

b) $\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos números inteiros negativos

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ou seja, todo número inteiro é racional

d) $\exists\, x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{R}$ (o símbolo $\exists$ significa "existe")

e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}^*_- = \{0\}$

f) $0{,}341341\ldots \notin \mathbb{Q}$

4.

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$, determinar:

a) os pares ordenados da relação R

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem

c) o diagrama de flechas

d) o gráfico cartesiano

5.

Dados os conjuntos $M = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ e $N = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x^2 + 1\}$, determinar:

a) os pares ordenados da relação R

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem

c) o diagrama de flechas

d) o gráfico cartesiano

6.

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$, determine:

a) os pares ordenados da relação R

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem

c) o diagrama de flechas

d) o gráfico cartesiano

7.

Dados os conjuntos $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $N = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x^2 - 1\}$, determine:

a) os pares ordenados da relação R

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem

c) o diagrama de flechas

d) o gráfico cartesiano

8.

Considerando a função $f(x) = 3x + 1$, determinar:
a) os coeficientes angular e linear
b) se a função é crescente ou decrescente
c) $f(2)$ e $f(-3)$

9.

Conhecendo a função $f(x) = -\frac{5}{2}x$, determinar:
a) coeficientes angular e linear
b) se a função é crescente ou decrescente
c) $f(-1)$ e $f(2)$
d) x para que se tenha $f(x) = 20$

10.

Determinar a lei da função que é do tipo $f(x) = ax + b$
$f(1) = 2$ e $f(3) = 8$.
e calcular $f(2)$, sabendo que

11.

Determine os coeficientes angular e linear, classifique a função em crescente ou decrescente e calcule $f(2)$, $f(-4)$ e $f(0)$ das seguintes funções:
a) $f(x) = x + 3$
b) $f(x) = 2 + 4x$
c) $f(x) = -\frac{7}{2}x$

12.

Determine a lei $f(x) = ax + b$, da função f nos seguintes casos:
a) $f(3) = 5$ e $f(-1) = -7$
b) $f(0) = 5$ e $f(-4) = -3$

13.

Sabendo que a lei da função f é $f(x) = ax + b$, determine $f(2)$ nos seguintes casos:
a) $f(1) = -1$ e $f(-2) = -4$
b) $f(-2) = 11$ e $f(4) = -13$

14.

(Mack-SP) A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Qual o valor de $f(3)$?

15.

(Fuvest-SP) As funções f e g são dadas por:
$f(x) = \frac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \frac{4}{3}x + a$.
Sabe-se que $f(0) - g(0) = \frac{1}{3}$.
Determine $f(3) - 3\,g\left(\frac{1}{5}\right)$.

16.

Determine a raiz ou zero das seguintes funções do 1º grau:
a) $y = -3x - 6$
b) $y = -5x + 15$
c) $y = 7x$
d) $y = -x - 1$
e) $y = \frac{2}{5}x + 1$
f) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}$

17.

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esboce o gráfico das seguintes funções do 1º grau:
a) $y = 2x + 2$
b) $y = -3x + 6$
c) $y = 3x$
d) $y = -4x$
e) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
f) $y = -x + \frac{1}{2}$
g) $y = -x$
h) $y = 0{,}1x - 1$

18.

(PUC) Esboce o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 3$.

19.

Esboce o gráfico das funções seguintes:
a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = x^2 - 5x + 6$
c) $y = -x^2 - 4x + 12$
d) $y = -x^2 + 6x - 9$

20.

Determine os zeros ou as raízes de cada uma das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 5x + 4$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^2 - 100$

d) $y = 3x^2 - 6x$

21.

Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 - 3x + 1$, determinando:

a) as raízes

b) as coordenadas do vértice

c) a classificação de y_V (valor mínimo ou valor máximo da função)

d) intersecção da curva com o eixo *y*

22.

Esboce o gráfico e identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = 5^x$